2023 年全国硕士研究生招生考试（数学二）试题及答案解析

一、选择题

1.曲线 $y = x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

A.$y = x+\mathrm{e}.$

B.$y = x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}.$

C.$y = x.$

D.$y = x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}.$

【答案】B

【解析】 $y = x\ln\left(\mathbf{e}+\dfrac{1}{x-1}\right), k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)=\ln\mathrm{e}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)-x\right]$$

令 $\dfrac{1}{x-1}=t$

$$=\lim_{t\to0}\left[\left(\frac{1}{t}+1\right)\ln(\mathrm{e}+t)-\left(\frac{1}{t}+1\right)\right]=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)\ln(\mathrm{e}+t)-(t+1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(\mathrm{e}+t)+(1+t)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}+t}-\dfrac{1}{t+1}}{1}=\ln\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-1=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

$y = x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}.$

2.函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0\end{cases}$ 的一个原函数为

A.$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

B.$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

C.$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

D.$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

【答案】D

【解析】

$$\int(x+1)\cos x\mathrm{d}x=\int(x+1)\mathrm{d}\sin x=(x+1)\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x=(x+1)\sin x+\cos x+c$$

故排除 AB，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=0$，排除 C，故选 D.

3.已知 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足：$x_1=y_1=\dfrac{1}{2},x_{n+1}=\sin x_n,y_{n+1}=y_n^2(n=1,2,\cdots),\in$ 则当 $n\to\infty$ 时，

A.x_n是y_n的高阶无穷小.

B.y_n是x_n的高阶无穷小.

C.x_n与y_n是等价无穷小.

D.x_n与y_n是同阶但不等价的无穷小.

【答案】B

【解析】首先 $x_n>0,x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，由单调有界准则可知 $\{x_n\}$ 收敛，其次 $0<y_n\le\dfrac{1}{2},y_{n+1}=y_n^2<y_n$ 由单调有界准则可知 $\{y_n\}$ 也收敛，令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_{n+1}=b$

则 $a=\sin a,b=b^2\Rightarrow a=0,b=0$，又由基础 30 讲 104 页例 7.9，可知当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$\sin x>\dfrac{2x}{\pi}$ 且 $y_{n+1}=y_n^2=y_n\cdot y_n\le\dfrac{1}{2}\cdot y_n$，

可得 $0<\dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}}=\dfrac{y_n\cdot y_n}{\sin x_n}<\dfrac{\frac{1}{2}y_n}{\frac{2x_n}{\pi}}=\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{y_n}{x_n}<\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2\dfrac{y_{n-1}}{x_{n-1}}<\cdots<\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n\dfrac{y_1}{x_1}=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n$，又因为

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n=0$，根据夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}=0$，故选 B.

4.若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则

A. $a<0,b>0.$　　B. $a>0,b>0.$

C. $a=0,b>0.$　　D. $a=0,b<0.$

【答案】 C

【解析】 当 $y''+ay'+by=0$ 有实根时，$a^2-4b\geqslant 0$，设根为 r_1,r_2，则 $y=c_1\mathrm{e}^{r_1x}+c_2\mathrm{e}^{r_2x}$ 或 $y=(c_1+c_r)\mathrm{e}^{r_1x}(r_1=r_2)$．故此时不可能有解在（-∞，+∞）有界．当 $a^2-4b<0$ 时．$y=(c_1\cos\beta x+c_2\cos\beta x)\mathrm{e}^{ax}$,若想解在（-∞，+∞）有界，因此 a=0，结合 $a^2-4b<0$ 可得 b＞0.故选 C.

5.设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t\end{cases}$ 确定，则

A. $f(x)$连续, $f'(0)$不存在

B. $f'(0)$存在, $f'(x)$在$x=0$处不连续.

C. $f'(x)$连续, $f''(0)$不存在.

D. $f''(0)$存在, $f''(x)$在$x=0$处不连续.

【答案】 C

【解析】 $\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=|t|\sin t\end{cases}$

当 $t\geqslant 0$, $\begin{cases}x=3t\\ y=t\sin t\end{cases}$，即 $x\geqslant 0$, $y=\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$

当 $t<0$, $\begin{cases}x=t\\ y=-t\sin t\end{cases}$, $x<0$ 时 $y=-x\sin x$

$$y'=\begin{cases}\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{x}{9}\cos\frac{x}{3} & x>0\\ 0 & x=0\\ -\sin x-x\cos x & x<0\end{cases}, \lim_{x\to 0}y'(x)=y'(0)=0, y'(x) 在 x=0 处连续.$$

$y''_+(0)=\frac{2}{9}$， $y''_-(0)=-2$， $y''(0)$ 不存在.

故选 C.

6.若函数 $f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}dx$ 在 $\alpha=\alpha_0$ 处取得最小值，则 $\alpha_0=$

A. $-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$　　B. $-\ln(\ln 2)$　　C. $\frac{1}{\ln 2}$　　D. $\ln 2$

【答案】A

【解析】 $f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^{\alpha+1}}d(\ln x)=-\frac{1}{\alpha}(\ln x)^{-\alpha}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\alpha(\ln 2)^{\alpha}}$

令 $g(\alpha)=\alpha\cdot(\ln 2)^{\alpha}$， $g^{'}(\alpha)=(\ln 2)^{\alpha}+\alpha\cdot(\ln 2)^{\alpha}\ln\ln 2=0$

$(\ln 2)^{\alpha}(1+\alpha\ln\ln 2)=0\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{\ln\ln 2}$，故选 A

7.设函数 $f(x)=(x^2+a)e^x$，若 $f(x)$ 没有极值点，但曲线 $y=f(x)$ 有拐点，则 a 的取值范围

A. $[0,1)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $[1,2)$　　D. $[2,+\infty)$

【答案】C.

【解析】 $f'(x)=\left(x^2+2x+a\right)e^x, \Delta=4-4a\le 0\Rightarrow a\ge 1$，

$f''(x)=\left(x^2+4x+a+2\right)e^x$, $\Delta>0\Rightarrow 16-4(a+2)>0\Rightarrow a<2$，故选 C.

8.设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵， $\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*=$

A. $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$

C.$\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$　　　　D.$\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

【答案】D

【解析】$\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} A & E \\ 0 & B \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1A & X_1+X_2B \\ X_3A & X_3+X_4B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & B \end{bmatrix}^* = |A|\cdot|B|\cdot\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B|\cdot A^* & -A^*B^* \\ 0 & |A|\cdot B^* \end{bmatrix}.$$

9.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2$　　B. $y_1^2-y_2^2$　　C. $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　D. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【答案】B.

【解析】$f\left(x_1,x_2x_3\right)=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 4 \\ 1 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 7+\lambda & -7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -3\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 7+\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$=(7+\lambda)\lambda(3-\lambda)$. 故选 B.

10.已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示，则$\boldsymbol{\gamma}=$

A. $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　B. $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　C. $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$　　D. $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$

【答案】 D

【解析】

$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2=0$，

$$\begin{cases}x_1=k_1\\x_2=k_2\\x_3=-l_1\\x_4=-1_2\end{cases}\quad x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$$

$$\begin{cases}x_1=3k\\x_2=-k\end{cases},\boldsymbol{\gamma}=3k\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-k\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix}.$$

二、填空题

11. 当$x\to0$时，函数$f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$与$g(x)=\mathrm{e}^{x^2}-\cos x$是等价无穷小，则$ab=$______.

【答案】 -2

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax+bx^2+\ln(1+x)}{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{ax+bx^2+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)}{1+x^2-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}=1$$

$\Rightarrow(a+1)=0\quad b-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\ \Rightarrow\ a=-1,b=2\Rightarrow ab=-2$.

12.曲线$y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\mathrm{d}t$的弧长为_______.

【答案】 $\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$

【解析】

$y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\mathrm{d}t$, $y'=\sqrt{3-x^2}$ ，由 $3-x^2\geqslant 0$, $x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+3-x^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x==\left[\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right]\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}==\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi.$$

13.设函数$z=z(x,y)$由$\mathrm{e}^z+xz=2x-y$确定, 则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(1,1)}=$______.

【答案】$-\frac{3}{2}$

【解析】利用隐函数公式法可知 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z-2}{\mathrm{e}^z+x}$ ，当 $x=1,y=1\Rightarrow z=0$ ， 则

$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{z=0,x=1}=-\frac{z-2}{\mathrm{e}^z+x}\Big|_{z=0,x=1}=1$ ，

可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{x=1}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\left(\mathrm{e}^z+x\right)-\left(\mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial x}+1\right)(z-2)}{\left(\mathrm{e}^z+x\right)^2}\Bigg|_{x=1}=-\frac{3}{2}.$

14.曲线$3x^3=y^5+2y^3$在$x=1$对应点处的法线斜率为______.

【答案】$-\frac{11}{9}$

【解析】

利用隐函数公式法可知 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1,y=1}=-\frac{9x^2}{-5y^4-6y^2}\Bigg|_{x=1,y=1}=\frac{9}{11}$ ，则法线斜率为 $-\frac{11}{9}$.

15. 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2)-f(x)=x,\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0,$ 则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$______.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$，由于 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$

所以原式为 $=-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$ ，由于 $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x+2)\mathrm{d}x$ ，故原式

$=\int_0^1\left[f(x+2)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

16.已知线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_3=1,\\x_1+ax_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$有解，其中$a,b$为常数，若$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$，则$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$

【答案】 8

【解析】

$$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=4\neq 0,\ r\begin{bmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{bmatrix}=3,\ r\begin{pmatrix}a&0&1&1\\1&a&1&0\\1&2&a&0\\a&b&0&2\end{pmatrix}=3,$$

$$\begin{vmatrix}a&0&1&1\\1&a&1&0\\1&2&a&0\\a&b&0&2\end{vmatrix}=0,\ 1\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=8$$

三、解答题

17.设曲线$L:y=y(x)(x>\mathrm{e})$经过点$(\mathrm{e}^2,0)$，L上任一点$P(x,y)$到y轴的距离等于该点处的切线在y轴上的截距.

(1)求$y(x)$;

(2)在L上求一点，使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小，并求此最小面积.

【解析】

由题意得$y=y'(x-x)+y$为切线方程，切线在y轴上得截距为$-x\cdot y'+y$

则$x=-x\cdot y'+y\Rightarrow y'-\dfrac{y}{x}=-1$.

$$y(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int+\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]$$

$$=x\left[\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+c\right]$$

$=x(-\ln x+c)$

又$x=1,\quad y=2$　则 $c=2$ 因此 $y(x)=x(-\ln x+2)$

(2) $f'(x)=y(x)=x(-\ln x+2)=0$

则$x=0$ 或 $x=\mathrm{e}^2$.

又$x>0$故$f(x)$的驻点为$x=\mathrm{e}^2$

$f''(x)=-\ln x+2+x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$

$f'\left(\mathrm{e}^2\right)=-2+2-1=-1<0$

故$f\left(\mathrm{e}^2\right)$为最大值,$\int_1^{\mathrm{e}^2}x(-\ln x+2)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^4-5}{4}$

18. 求函数$f(x,y)=x\mathrm{e}^{\cos y}+\frac{x^2}{2}$的极值.

【解析】

$\begin{cases}f_x'=\mathrm{e}^{\cos y}+x=0\\ f_y'=k\mathrm{e}^{\cos y}(-\sin y)=0\end{cases}$，得驻点 $(-\mathrm{e},2n\pi),\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},(2n+1)\pi\right)$;

$f_{xx}''=1$

$f_{xy}''=\mathrm{e}^{\cos y}(-\sin y)$

$f_{yy}''=x\mathrm{e}^{\cos y}\sin^2 y+k\mathrm{e}^{\cos y}(-\cos y)$

对于$(-\mathrm{e},2n\pi)$，$A=1,B=0,C=\mathrm{e}^2,AC-B^2>0,A>0$. 有极小值 $f(-\mathrm{e},2n\pi)=-\frac{\mathrm{e}^2}{2}$

对于$\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},(2n+1)\pi\right)$，$A=1,B=0,C=-\frac{1}{e^2},AC-B^2<0$，无极值.

19.已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge 1\}$.

(1)求 D 的面积；

(2)求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \overset{x=\tan t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{\tan t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc t\mathrm{d}t = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

(2) $\int_1^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right)^2\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\pi\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \pi(1-\frac{\pi}{4})$

20.(12分)设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$x^2+y^2-xy=1, x^2+y^2-xy=2$与直线$y=\sqrt{3}x, y=0$围成，计算$\iint\limits_D\frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解析】

$$\iint\limits_D \frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta\sin\theta}}}\cdot\frac{1}{r^2+2r^2\cos^2\theta}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\pi\frac{\sqrt{3}\ln 2}{24}$$

21.（12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有 2 阶连续导数，证明：

（1）若 $f(0)=0$，则存在 $\xi\in\left(-a,a\right)$,使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

（2）若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则存在 $\eta\in\left(-a,a\right)$ 使得

$\left|f''\left(\eta\right)\right|\geq\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|$.

【解析】

（1） $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)x^2$

则 $f(a)=f'(0)a+\frac{1}{2}f''\left(\varepsilon_2\right)a^2$，$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{1}{2}f''\left(\varepsilon_1\right)a^2$，其 中 $\xi_1\in\left(-a,0\right)$，

$\xi_2 \in (0,a)$.

$f(-a)+f(a)=\frac{1}{2}\left[f''(\varepsilon_1)+f''(\varepsilon_2)\right]a^2$

由介值定理可知平均值$\frac{1}{2}\left[f''(\varepsilon_1)+f''(\varepsilon_2)\right]=\frac{f(-a)+f(a)}{a^2}=f''(\xi)$，$\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-a,a)$,

∴ 即证

（2）

设$f(x)$在$x=x_0$处取得极值 即$x_0\in(-a\cdot a), f'(x_0)=0$

$\therefore f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$

代入 $x=-a,\ x=a$

$f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2$ (1) $,\eta_1\in(-a,x_0)$

$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(n_1)}{2}(a-x_0)^2$ (2) $,\eta_2\in(x_0,a)$

(2) - (1) 得

$f(a)-f(-a)=\frac{f'(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2-\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2$

$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{f''(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2-\frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2\right|$

$\le\left|\frac{f''(\eta)}{2}(a-x_0)^2\right|+\left|\frac{f''(\eta)}{2}(a+x_0)^2\right|$

$\le\left|\frac{f''(\eta)}{2}\right|\left[(a-x_0)^2+(a+x_0)^2\right]$

$=\left(\frac{f''(\eta)}{2}\right)\left(2a^2+2x_0^2\right)$

$=\left|f''(\eta)\right|\left(a^2+x_0{}^2\right)$

$\leq\ \left|f''(\eta)\right|\cdot 2a^2$， 其中$f''(\eta)=\max\left\{f''\left(\eta_1\right)\cdot f''\left(\eta_2\right)\right\},\eta\in(-a,a)$

$\therefore\left|f''(\eta)\right|\geqslant\ \dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

22.设矩阵$\boldsymbol{A}$满足对任意x_1,x_2,x_3均有$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$.

（1）求$\boldsymbol{A}$;

（2）求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$与对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解析】

解(1) 由题可知，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$\therefore\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

(2) $|A-\lambda E|=-(2+\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$

$\therefore A$ 中$\lambda_1=2,\quad\lambda_2=-1,\quad\lambda_3=-2$

A 中λ_1对应的线性无关特征向量$\alpha_1=(4,3,1)^T$.

A 中λ_2对应的线性无关特征向量$\alpha_2=\left(-\dfrac{1}{2},0,1\right)^T$

A 中λ_3对应的线性无关特征向量$\alpha_3=(0,-1,1)^\top$

$\therefore p=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$