

2023 年全国硕士研究生招生考试（数学一）试题及答案解析

一、选择题

1. 曲线 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

A. $y = x + e$.

B. $y = x + \frac{1}{e}$.

C. $y = x$.

D. $y = x - \frac{1}{e}$.

【答案】 B

【解析】 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right)$, $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right) = \ln e = 1$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right) - x \right]$$

$$\text{令 } \frac{1}{x-1} = t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{t} + 1\right) \ln(e + t) - \left(\frac{1}{t} + 1\right) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t) \ln(e+t) - (t+1)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(e+t) + (1+t) \cdot \frac{1}{e+t} - \frac{1}{t+1}}{1} = \ln e + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e}$$

$$y = x + \frac{1}{e}.$$

2. 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 则

A. $a < 0, b > 0$.

B. $a > 0, b > 0$.

C. $a = 0, b > 0$.

D. $a = 0, b < 0$.

【答案】 C

【解析】 当 $y'' + ay' + by = 0$ 有实根时, $a^2 - 4b \geq 0$, 设根为 r_1, r_2 , 则 $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ 或

$y = (c_1 + c_2 r) e^{rx} (r_1 = r_2)$. 故此时存在解在 $(-\infty, +\infty)$ 有界. 当 $a^2 - 4b < 0$

时, $y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{ax}$, 若想解在 $(-\infty, +\infty)$ 有界, 因此 $a=0$, 结合 $a^2 - 4b < 0$ 可得 $b > 0$. 故选 C.

3. 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = |t| \sin t \end{cases}$ 确定, 则

- A. $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在
- B. $f'(0)$ 存在, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.
- C. $f'(x)$ 连续, $f''(0)$ 不存在.
- D. $f''(0)$ 存在, $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

【答案】 C

【解析】 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = |t| \sin t \end{cases}$

当 $t \geq 0$, $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \sin t \end{cases}$, 即 $x \geq 0$, $y = \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}$

当 $t < 0$, $\begin{cases} x = t \\ y = -t \sin t \end{cases}$, $x < 0$ 时 $y = -x \sin x$

$y' = \begin{cases} \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{x}{9} \cos \frac{x}{3} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\sin x - x \cos x & x < 0 \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow 0} y'(x) = y'(0) = 0$, $y'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$y''_+(0) = \frac{2}{9}$, $y''_-(0) = -2$, $y''(0)$ 不存在.

故选 C.

4. 已知 $a_n < b_n (n=1, 2, \dots)$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 则“ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛”是“ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛”的

对收敛”的

A. 充分必要条件.

B. 充分不必要条件.

C.必要不充分条件.

D.既不充分也不必要条件.

【答案】 A

【解析】 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$ 收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 由 $|a_n| = |b_n + a_n - b_n| \leq |b_n| + |a_n - b_n|$, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, $|b_n| = |a_n + b_n - a_n| \leq |a_n| + |b_n - a_n|$, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛.

故选 A.

5. 已知 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = O$, E 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵

$\begin{bmatrix} O & A \\ BC & E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} AB & C \\ O & E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 , 则

A. $r_1 \leq r_2 \leq r_3$.

B. $r_1 \leq r_3 \leq r_2$.

C. $r_3 \leq r_1 \leq r_2$.

D. $r_2 \leq r_1 \leq r_3$.

【答案】 B

【解析】

对于 $\begin{bmatrix} O & A \\ BC & E \end{bmatrix}$, 将分块矩阵 $-A$ 的第二行加到第一行, 即

$$\begin{bmatrix} E & -A \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ BC & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ABC & O \\ BC & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ BC & E \end{bmatrix} \text{ 故, } r_1 = n$$

对于 $\begin{bmatrix} AB & C \\ O & E \end{bmatrix}$, 将分块矩阵的第二行的 $-C$ 倍加到第一行, 即

$$\begin{bmatrix} E & -C \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & C \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

$$r_2 = r(AB) + r(E) = r(AB) + n$$

对于 $\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}$, 将分块矩阵的第一行的 $-AB$ 倍加到第二行, 即

$\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & AB \\ O & -ABAB \end{bmatrix}$, 再将分块矩阵的第一列 $-AB$ 倍的加到第二列,

即 $\begin{bmatrix} E & AB \\ O & -ABAB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -AB \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & -ABAB \end{bmatrix}$

$r_3 = r(E) + r(-ABAB)$, 又因为 $0 \leq r(-ABAB) \leq r(AB)$

故 $r_1 \leq r_3 \leq r_2$, 选 B.

6. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$. C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

【答案】 D

【解析】 A 中矩阵的特征值不同, 分别为 1、2、3; B 中矩阵为实对称矩阵; C 中矩阵特征值 2 为二重根, 对应的线性无关特征向量个数为 2; D 中矩阵的特征值 2 为二重根, 特征值 2 对应的线性无关特征向量个数为 1, 不可对角化, 故选 D

7. 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 γ 既可由 α_1, α_2 线性表示, 也

可由 β_1, β_2 线性表示, 则 $\gamma =$

A. $k \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. B. $k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. C. $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. D. $k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.

【答案】 D

【解析】

$$\gamma = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2, \quad k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 - l_1 \beta_1 - l_2 \beta_2 = 0,$$

$$\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2 \\ x_3 = -l_1 \\ x_4 = -l_2 \end{cases} \quad x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3k \\ x_2 = -k \end{cases}, \gamma = 3k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

8. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E(|X - EX|) =$

- A. $\frac{1}{e}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{e}$. D. 1.

【解析】 C

【答案】

$$E(|X - 1|) = E(X - 1) + 2 \cdot P\{X = 0\} = 0 + 2e^{-1} = 2e^{-1}.$$

9. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的简单随机样本, Y_1, Y_2, \dots, Y_m 为来自总体 $N(\mu_2, 2\sigma^2)$ 的简单随机样本, 且两样本相互独立,

记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i, S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$, 则

- A. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$ B. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$
 C. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$ D. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$

【答案】 D

【解析】 $\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$

$$\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} / n-1}{\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2} / m-1} = \frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1).$$

10. 设 X_1, X_2 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 $\sigma (\sigma > 0)$ 是未知参数. 记若

$\hat{\sigma} = a|X_1 - X_2|$ 是 σ 的无偏估计, 则 $a =$

- A. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ C. $\sqrt{\pi}$ D. $\sqrt{2\pi}$

【答案】 A

【解析】 $E(a|X_1 - X_2|) = aE(|X_1 - X_2|) = a \cdot \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} = \sigma, \quad a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

其中: $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, 令 $Z = X_1 - X_2$

$$\begin{aligned} E(|X_1 - X_2|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz = 2 \int_0^{+\infty} \frac{z}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz \\ &= 2 \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} (-2\sigma^2) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} d\left(-\frac{z^2}{4\sigma^2}\right) = -\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

二、填空题

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小, 则

$ab =$ _____.

【答案】 -2.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + bx^2 + \ln(1+x)}{e^{x^2} - \cos x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + bx^2 + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)}{1 + x^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)} = 1$$

$$\Rightarrow (a+1) = 0 \quad b - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow ab = -2.$$

12. 曲面 $z = x + 2y + \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处的切平面方程为 _____.

【答案】 $x + 2y - z = 0$.

【解析】

$$z = x + 2y + \ln(1 + x^2 + y^2)$$

$$\text{令 } F(x, y, z) = z - x - 2y - \ln(1 + x^2 + y^2)$$

$$F'_x = -1 - \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, F'_x(0, 0, 0) = -1$$

$$F'_y = -2 - \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, F'_y(0, 0, 0) = -2$$

$$F'_z = 1, \text{故平面方程为 } x + 2y - z = 0$$

13. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = 1 - x, x \in [0, 1]$. 若 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$,

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \text{_____}.$$

【答案】 0

【解析】 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$ 因此 $f(x)$ 做偶延拓

$$a_n = 2 \int_0^1 (1-x) \cdot \cos n\pi x dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 (1-x) d \sin n\pi x$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{n\pi} \left[(1-x) \sin n\pi x \Big|_0^1 + \int_0^1 \sin n\pi x \right] dx = \frac{2}{n\pi} \cdot \int_0^1 \sin n\pi x dx \\
 &= -\frac{2}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 = -\frac{2}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 = -\frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi^2} = \frac{2[1 - (-1)^n]}{n^2\pi^2}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 0.$$

14. 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2) - f(x) = x$, $\int_0^2 f(x) dx = 0$, 则 $\int_1^3 f(x) dx =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx, \text{ 由于 } \int_0^2 f(x) dx = 0$$

所以原式为 $-\int_0^1 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$, 由于 $\int_2^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x+2) dx$, 故原式

$$= \int_0^1 [f(x+2) - f(x)] dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

15. 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$. 若

$\gamma^T \alpha_i = \beta^T \alpha_i (i=1, 2, 3)$, 则 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 =$ _____.

【答案】 $\frac{11}{9}$

$$(k_1, k_2, k_3) \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} \alpha_i = \beta^T \alpha_i \Rightarrow \alpha_i^T (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \alpha_i^T \beta$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow (k_1, k_2, k_3) = \left(\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{11}{9}.$$

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B(1, \frac{1}{3}), Y \sim B(2, \frac{1}{2})$, 则 $P\{X=Y\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】
$$\begin{aligned} p(x=y) &= p(x=0, y=0) + p(x=1, y=1) \\ &= p(x=0)p(y=0) + p(x=1)p(y=1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

三、解答题

17. (本题满分 10 分)

设曲线 $y = y(x) (x > 0)$ 经过点 $(1, 2)$, 该曲线上任一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 求函数 $f(x) = \int_1^x y(t) dt$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值.

【解析】

由题意得 $y = y'(x-x) + y$ 切线, 切线在 y 轴上的截距为 $-x \cdot y' + y$

则 $x = -x \cdot y' + y$.

$$y' - \frac{y}{x} = -1.$$

$$y(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int + e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx + c \right]$$

$$= x \left[\int \frac{1}{x} dx + c \right]$$

$$= x(-\ln x + c)$$

又 $x=1, y=2$ 则 $c=2$ 因此 $y(x) = x(-\ln x + 2)$

$$(2) f'(x) = y(x) = x(-\ln x + 2) = 0$$

则 $x=0$ 或 $x=e^2$.

又 $x > 0$ 故 $f(x)$ 的驻点为 $x=e^2$

$$f''(x) = -\ln x + 2 + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(e^2) = -2 + 2 - 1 = -1 < 0$$

故 $f(e^2)$ 为最大值, 最大值为 $\int_1^{e^2} x(-\ln x + 2) dx = \frac{e^4 - 5}{4}$

18. (本题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$ 的极值.

【解析】

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 2xy - 3x^2y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y - x^3 + y - x^2 = 2y - x^2 - x^3 = 0$$

$$\text{得 } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{10}{27} \end{cases}$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20x^3 - 2y - 6xy, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x - 3x^2, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

对于 $x=0, y=0; A=0, B=0, C=2$. 取 $y=x^{\frac{5}{2}}, f(x,y) < 0$, 取 $y=x, f(x,y) > 0$

故 $x=0, y=0$ 不是极值点

(2) $x=1, y=1. A=12, B=-5, C=2, AC-B^2=24-25 < 0$. 故 $(1,1)$ 不是极值点.

(3) $x=\frac{2}{3}, y=\frac{10}{27}, A=\frac{100}{27}, B=-\frac{8}{3}, C=2, AC-B^2 > 0, f\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}\right) = -\frac{4}{729}$ 为极小值

19. (本题满分 12 分)

设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成. Σ 为 Ω 的边界曲面的外侧.

计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} 2xzdydz + xz \cos ydzdx + 3yz \sin xdx dy.$$

【解析】

由高斯公式可得

$$I = \iiint_{\Omega} 2z - xz \sin y + 3y \sin x dv$$

三重积分先一后二积分得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{1-x} (2z - xz \sin y + 3y \sin x) dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1+x^2) dx dy \\ &= \pi + \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (y^2+x^2) dx dy \\ &= \pi + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{5}{4} \pi \end{aligned}$$

20.(本题满分12分)

设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上具有2阶连续导数 证明:

(1)若 $f(0) = 0$, 则存在 $\xi \in (-a, a)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{a^2}[f(a) + f(-a)]$;

(2)若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta \in (-a, a)$, 使得

$$|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|.$$

【解析】

$$(1) f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

则 $f(a) = f'(0)a + \frac{1}{2}f''(\xi_2)a^2$, $f(-a) = f'(0)(-a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)a^2$, 其中 $\xi_1 \in (-a, 0)$, $\xi_2 \in (0, a)$.

$$f(-a) + f(a) = \frac{1}{2}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]a^2$$

由介值定理可知平均值 $\frac{1}{2}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)] = \frac{f(-a) + f(a)}{a^2} = f''(\xi)$, $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-a, a)$,

\therefore 即证

(2)

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值 即 $x_0 \in (-a, a)$, $f'(x_0) = 0$

$$\therefore f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

代入 $x = -a$, $x = a$

$$f(-a) = f(x_0) + \frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2 \quad (1), \eta_1 \in (-a, x_0)$$

$$f(a) = f(x_0) + \frac{f''(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2 \quad (2), \eta_2 \in (x_0, a)$$

(2) - (1) 得

$$f(a) - f(-a) = \frac{f''(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2 - \frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2$$

$$|f(a) - f(-a)| = \left| \frac{f''(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2 - \frac{f''(\eta_1)}{2}(a+x_0)^2 \right|$$

$$\leq \left| \frac{f''(\eta)}{2}(a-x_0)^2 \right| + \left| \frac{f''(\eta)}{2}(a+x_0)^2 \right|$$

$$\leq \left| \frac{f''(\eta)}{2} \right| \left[(a-x_0)^2 + (a+x_0)^2 \right]$$

$$= \left(\frac{f''(\eta)}{2} \right) (2a^2 + 2x_0^2)$$

$$= |f''(\eta)| (a^2 + x_0^2)$$

$$\leq |f''(\eta)| \cdot 2a^2, \quad \text{其中 } f''(\eta) = \max \{ f''(\eta_1), f''(\eta_2) \}, \eta \in (-a, a)$$

$$\therefore |f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|.$$

21. (本题满分12分)

已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3,$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3.$$

(1) 求可逆变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$;

(2) 是否存在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$?

【解析】

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 f &= x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \\
 &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \\
 &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 \\
 &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$$\lambda = 0, 2, 3$$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$$\lambda = 0, 1, 2$$

特征值不同, 故不存在.

22. (本题满分12分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求:(1)求 X 与 Y 的协方差,

(2) X 与 Y 是否相互独立?

(3)求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度

$$(1) EXY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xy}{\pi} (x^2 + y^2) dx dy = 0$$

$$EX = 0, EY = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

(2) 不独立

$$(3) F_z(z) = P\{x^2 + y^2 \leq z\}$$

$$\text{当 } z < 0 \text{ 时 } F_z(z) = 0$$

$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时 } F_z(z) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时 } F_z(z) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} \frac{2}{\pi} r^3 dr \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} z^2 d\theta = z^2 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f_z(z) = \begin{cases} 2z, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$