2022 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题及答案

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出 4 个选项，只有一个选项是复合题目要求的，请将所选选项前面的字母填在答题卡指定的位置.

1.设$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{mx}=1$，则（）

(A)$f(1)=0$　(B)$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$　(C)$f'(1)=1$　(D)$\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$

参考答案：(B)

2.设函数$z=xyf\left(\frac{y}{x}\right)$，其中$f(u)$可导，若$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy(\ln y-\ln x)$，则（ ）

(A)$f(1)=\frac{1}{2}$，$f'(1)=0$　(B)$f(1)=0$，$f'(1)=\frac{1}{2}$

(C)$f(1)=\frac{1}{2}$，$f'(1)=1$　(D)$f(1)=0$，$f'(1)=1$

参考答案：(B)

3.已知数列$\{x_n\}$，其中$-\frac{\pi}{2}\le x_n\le\frac{\pi}{2}$，则（ ）

(A)当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

(B)当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

(C)当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

参考答案：(D)

4.$I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}dx$，$I_2=\int_0^1\frac{\ln 1+x}{1+\cos x}dx$，$I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}dx$，则（ ）

(A)$I_1<I_2<I_3$　(B)$I_2<I_3<I_1$　(C)$I_1<I_3<I_2$　(D)$I_2<I_1<I_3$

参考答案：(A)

5.下列是矩阵$A_{3\times 3}$可对角化充分而非必要条件是

(A)矩阵$A_{3\times 3}$有三个不同特征值

(B)矩阵$A_{3\times 3}$有三个线性无关特征向量

(C)矩阵$A_{3\times 3}$的任意两个特征向量正交

(D)矩阵$A_{3\times 3}$有三个不同特征值

参考答案(A)

6.设A，B为n阶矩阵，E为单位矩阵，若方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解，则（ ）

(A)方程组$\begin{bmatrix}A & O\\ E & B\end{bmatrix}y=0$只有零解.

(B)方程组$\begin{bmatrix}E & A\\ O & AB\end{bmatrix}y=0$只有零解.

(C)方程组$\begin{bmatrix}A & B\\ O & B\end{bmatrix}y=0$与$\begin{bmatrix}B & A\\ O & A\end{bmatrix}y=0$同解.

(D)方程组$\begin{bmatrix} AB & B \\ O & A \end{bmatrix} y = 0$ 与$\begin{bmatrix} BA & A \\ O & B \end{bmatrix} y = 0$ 同解.

参考答案：(C)

7.设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$，$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$与$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_4$等价，则$\lambda$的取值范围是（ ）

(A)$\{0,1\}$　　(B)$\{\lambda | \lambda \in R，\lambda \neq -2\}$

(C)$\{\lambda | \lambda \in R，\lambda \neq -1，\lambda \neq -2\}$　　(D)$\{\lambda | \lambda \in R，\lambda \neq -1\}$

参考答案：(C)

8.设随机变量$X \sim U(0,3)$，随机变量$Y \sim \lambda(2)$，且X,Y的协方差$\mathrm{cov}(X,Y) = -1$，则$D(2X - Y + 1) =$（ ）

(A)1　(B)5　(C)9　(D)12

参考答案：(C).

9.设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布，且X_1的 4 阶矩存在，记$E(X_1^k) = \mu_k(k = 1，2，3，4)$，则由切比雪夫不等式，对任意由$\varepsilon > 0$ 有$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq$（ ）.

(A)$\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2}$　(B) $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$　(C) $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n\varepsilon^2}$　(D) $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

参考答案：(A).

10.设$X \sim N(0,1)$，在$X = x$的条件下，随机变量$Y \sim N(x,1)$，则X与Y的相关系数ρ_{xy}（ ）

(A)$\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

参考答案：(D).

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11.设$f(xy)=x^2+2y^2$，求其在(0,1)处的最大方向导数______.

参考答案：4.

12.求$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=$_______.

参考答案：4.

13. 设$x\geq 0$，$y\geq 0$，满足$x^2+y^2\leq ke^{x+y}$，则k的取值范围是______

参考答案：$k\geq 2e^{-2}$.

14. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^{-nx}$的收敛域为$(a,+\infty)$，则$a=$______

解析：取$u_n(x)=\frac{n!}{n^n}e^{-nx}$，则$P(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}e^{-(n+1)x}}{\frac{n!}{n^n}e^{-nx}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n e^{-x}=\frac{1}{e^{1+x}}$,

当$P(x)<1$ 时，级数收敛，即$\frac{1}{e^{1+x}}<1$，得$x>-1$，

故收敛域为$(-1,+\infty)$，$a=-1$.

参考答案：-1.

15.已知矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆，其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵，矩阵$\boldsymbol{B}$满足$[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，

则$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$_____.

解析：$[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A} \quad \Longrightarrow (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})-\boldsymbol{E}]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，

即：$-\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}$，

故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{A}$，由于$\boldsymbol{A}$可逆，故$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$.

参考答案：$-\boldsymbol{E}$.

16. 设A，B，C为随机事件，且A与B互不相容，A与C互不相容，B与C相互独立，

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=$______.

参考答案：$\frac{5}{8}$.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设函数$y(x)$是微分方程$y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$满足条件$y(1)=3$ 的解，求$y(x)$的渐进线.

解：由$y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$，可知

$$y(x)=e^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}\left[\int 2\sqrt{x}e^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}dx+C\right]=e^{-\sqrt{x}}\left[\int 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx+C\right]$$

$$=e^{-\sqrt{x}}\left[2xe^{\sqrt{x}}+C\right]=2x+Ce^{-\sqrt{x}}\ ,$$

由$y(1)=3$，得$C=e$，即$y(x)=2x+e^{1-\sqrt{x}}$，

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}\left(2x+e^{1-\sqrt{x}}\right)=+\infty,$$

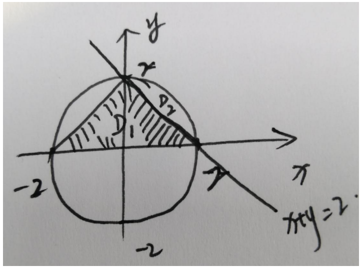
$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+e^{1-\sqrt{x}}}{x}=2,$$

$$\lim_{x\to\infty}[y(x)-2x]=\lim_{x\to\infty}e^{1-\sqrt{x}}=0,$$

故，$y(x)$的渐进线为$y=2x$.

18.已知平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|y-2\le x\le\sqrt{4-y^2}，0\le y\le 2\right\}$，计算$I=\iint_{\mathrm{D}}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy$.

解：从右图可知$D=D_1+D_2$，



$$I=\iint_{D_1}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy+\iint_{D_2}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy\ \ ,$$

其中D_1关于y轴对称，

上式中$\iint_{D_1}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy=\iint_{D_1}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}dx\,dy+\iint_{D_1}\frac{2xy}{x^2+y^2}dx\,dy=\iint_{D_1}dx\,dy=4$，

$$\iint_{D_2}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}^{2}\frac{r^2-2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}r\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}^{2}(1-\sin 2\theta)r\,dr\ =2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta\,(1-\sin 2\theta)}{1+\sin 2\theta}d\theta$$

$$=2\pi-6,$$

故，$I=\iint_{D_1}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy+\iint_{D_2}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy=4+2\pi-6=2\pi-2.$

19.已知Σ为曲面 $4x^2+y^2+z^2=1\left(x\ge 0，\ y\ge 0，\ z\ge 0\right)$的上侧，$L$是$\Sigma$的边界曲线，其正向与与$\Sigma$的正法向量满足右手法则，计算积分曲线

$$I=\int_L (yz^2-\cos z)\,dx+2xz^2\,dy+(2xyz+x\sin z)\,dz\,.$$

解：由斯托克斯公式

$$I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz^2-\cos z & 2xz^2 & 2xyz+x\sin z\end{vmatrix}=\iint_\Sigma -2xz\,dy\,dz+z^2\,dx\,dy$$

$$=\iint_{4x^2+y^2\le 1}(1-12x^2-y^2)\,dx\,dy\ =\frac{\pi}{8}-\iint_{4x^2+y^2\le 1}(12x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

令$X=2x$，$Y=y$，原式化为

$$I=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\iint_{X^2+Y^2\le 1,X\ge 0,Y\ge 0}(3X^2+Y^2)\,dX\,dY$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(3r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)r\,dr=0$$

20.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有二阶连续导数，证明：$f''(x)\ge 0$ 的充要条件是：对不同实数a，b，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$

解：$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$，$\xi$介于$x$与$\frac{a+b}{2}$之间，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\int_a^b\left[\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx\ ,$$

证明必要性：若$f''(x)\ge 0$，则$f''(\xi)\ge 0$，有$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)$,

证明充分性：若$\exists x_0$使得$f''(x)<0$，因为$f(x)$有二阶连续导数，$\exists\delta$使得$f''(x)$在$\left[x_0-\delta，x_0+\delta\right]$内恒小于 0，令$x_0-\delta=a$，$x_0+\delta=b$，

$$\int_a^b f(x)\,dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\int_a^b\left[\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx<f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$，矛盾，故$f''(x)\geq 0$，

得证.

21.已知二次型$f\left(x_1，x_2，x_3\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_ix_j.$）

(1)写出$f\left(x_1，x_2，x_3\right)$对应的矩阵；

(2)求正交变换$x=Qy$将$f\left(x_1，x_2，x_3\right)$化为标准形；

(3)求$f\left(x_1，x_2，x_3\right)=0$ 的解.

解析：(1)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$

(2) $r(\boldsymbol{A})=1$，特征值$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=14$，

当$\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，$\boldsymbol{A}x=0$ 的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$，

当$\lambda_3=14$ 时，对应的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$正交化，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2，\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1，\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\6\\-5\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$单位化，$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{bmatrix}3\\6\\-5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，

存在$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1，\boldsymbol{\eta}_2，\boldsymbol{\eta}_3)$正交变换$x=\boldsymbol{Q}y$将$f(x_1，x_2，x_3)$化为标准形$f=14y^3$.

(3)$f(x_1，x_2，x_3)=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3=(x_1+2x_2+3x_3)^2$，

令$(x_1+2x_2+3x_3)^2=0$，得$x_1+2x_2+3x_3=0$，基础解系为$\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$，

即方程组的通解为$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\gamma}_1+k_2\boldsymbol{\gamma}_2$，其中$k_1$，$k_2$不同时为 0.

22.设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自期望为θ的指数分布的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$是来自期望为 2θ的指数分布的简单随机样本，$X_1,X_2,\cdots,X_n$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$相互独立，求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$，并求$D(\hat{\theta})$.

解：由题知，X的概率密度为$f_x(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，

Y的概率密度为$f_y(y;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y}{2\theta}}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，

令$L=\prod_{i=1}^n f_X(x_i;\theta)\prod_{j=1}^m f_Y(y_j;\theta)$

$=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}\prod_{j=1}^m\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y_j}{2\theta}}$，$(x_i>0，y_j>0，i=1,2,\cdots,n，j=1,2,\cdots,m)$

则$\ln L=\sum_{i=1}^n\left(-\ln\theta-\frac{x_i}{\theta}\right)+\sum_{j=1}^m\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\theta-\frac{y_j}{2\theta}\right)$，

求导$\frac{d\ln L}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\theta}+\frac{x_i}{\theta^2}\right)+\sum_{j=1}^{m}\left(-\frac{1}{\theta}+\frac{y_j}{2\theta^2}\right)=-\frac{m+n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta^2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{y_j}{2\theta^2}=0$,

解得$\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}y_j\right)$，即$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)$

$D(\hat{\theta})=\frac{1}{(m+n)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}DX_i+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}DY_j\right)=\frac{1}{(m+n)^2}\left(n\theta^2+\frac{1}{4}m\cdot 4\theta^2\right)=\frac{\theta^2}{m+n}$.