2022年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题及答案

一、选择题：1~10小题，每小题5分，共50分，下列每题给出4个选项，只有一个选项是复合题目要求的，请将所选选项前面的字母填在答题卡指定的位置.

1.当$x \to 0$时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$是非零无穷小量，给出以下四个命题，其中所有正确的序号是（ ）

①若$\alpha(x) \sim \beta(x)$，则$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$

②若$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，则$\alpha(x) \sim \beta(x)$

③若$\alpha(x) \sim \beta(x)$，则$\alpha(x) - \beta(x) = o\big(\alpha(x)\big)$

④若$\alpha(x) - \beta(x) = o\big(\alpha(x)\big)$，则$\alpha(x) \sim \beta(x)$

(A)①②　　(B)①④　　(C)①③④　　(D)②③④

参考答案：(C)

2.$\int_0^2 dy \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx =$（　）

(A)$\frac{\sqrt{2}}{6}$　　(B)$\frac{1}{3}$　　(C)$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　(D)$\frac{2}{3}$

参考答案：(D)

3.设函数$f(x)$在$x = x_0$处有二阶导数，则（ ）

(A)当$f(x)$在x_0处的某邻域内单调增加时，$f'(x_0) > 0$，

(B)当$f'(x_0) > 0$时，$f(x)$在x_0的某邻域内单调增加，

(C)当$f(x)$在x_0处的某邻域内是凹函数时，$f''(x_0) > 0$， (D)当$f''(x_0)>0$时，$f(x)$在x_0的某邻域内是凹函数.

参考答案：(B)

4.设函数$f(t)$连续，令$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\,dt$，则（ ）

(A)$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ (B)$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(C)$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ (D)$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

参考答案：(C)

5.设p为常数，若反常积分$\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$收敛，则$p$的取值范围是（ ）

(A)$(-1,1)$ (B)$(-1,2)$ (C)$(-\infty,1)$ (D)$(-\infty,2)$

参考答案：(A)

6.已知数列$\{x_n\}$，其中$-\frac{\pi}{2}\le x_n\le\frac{\pi}{2}$，则（ ）

(A)当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

(B)当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

(C)当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

(D)当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

参考答案：(D)

7.已知$I_1=\int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}dx$，$I_2=\int_0^1 \frac{\ln 1+x}{1+\cos x}dx$，$I_3=\int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}dx$，则（ ）

(A)$I_1<I_2<I_3$ (B)$I_2<I_3<I_1$ (C)$I_1<I_3<I_2$ (D)$I_2<I_1<I_3$

参考答案：(A)

8.设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$的特征值为 1，-1，0 的充分必要条件是（ ）

(A)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$

(B)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P^{-1}}$

(C)存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q^{-1}}$

(D)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P^{T}}$

参考答案：(B)

9.设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，则线性方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$解的情况为（ ）

(A)无解 (B)有解 (C)有无穷多解或无解 (D)有唯一解或无解

参考答案：(D)

10.设$\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$与$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_4$等价，则$\lambda$的取值范围是（ ）

(A)$\{0,1\}$

(B)$\{\lambda|\lambda\in R，\lambda\neq-2\}$

(C)$\{\lambda|\lambda\in R，\lambda\neq-1，\lambda\neq-2\}$

(D)$\{\lambda|\lambda\in R，\lambda\neq-1\}$

参考答案：(C)

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11.$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$ ______.

参考答案：$e^{\frac{1}{2}}$.

12.已知函数$y=y(x)$由方程$x^2+xy+y^2=3$ 确定，则$y''(1)=$______.

参考答案：$-\frac{31}{32}$.

13.$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1}dx=$______.

参考答案：$\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$.

14.微分方程$y'''-2y''+5y'=0$ 的通解$y(x)=$______.

参考答案：$y=C_1+e^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$.

15.已知曲线L的极坐标方程为$r=\sin 3\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{3}\right)$，则$L$围成有界区域的面积为______.

参考答案：$\frac{\pi}{12}$.

16.设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，交换$\boldsymbol{A}$的第二行和第三行，再将第 2 列的-1 倍加到第 1 列，得到矩阵$\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}$的迹$tr(\boldsymbol{A}^{-1})=$______.

参考答案：-1.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.已知函数$f(x)$在$x=1$处可导且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$，求$f'(1)$.

解：由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$可知，$\lim\limits_{x\to 0}\left[f\left(e^{x^2}\right)-3f(1+\sin^2 x)\right]=0$，

即$-2f(1)=0$，故$f(1)=0$，

由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-f(1)-3\left[f\left(1+\sin^2 x\right)-f(1)\right]}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-f(1)}{x^2}-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(1+\sin^2 x\right)-f(1)}{x^2}=f'(1)-3f'(1)=2$，

得$f'(1)=-1$.

18.设函数$y(x)$是微分方程$2xy'-4y=2\ln x-1$满足条件$y(1)=\frac{1}{4}$的解，求曲线$y=y(x)(1\le x\le e)$的弧长.

解：由题意可知$y'-\frac{2y}{x}=\frac{2\ln x-1}{2x}$,

则$y(x)=e^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}\left[\int\frac{2\ln x-1}{2x}e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}dx+C\right]=x^2\left[\int\frac{2\ln x-1}{2x^3}dx+C\right]=-\frac{1}{2}\ln x+Cx^2$，

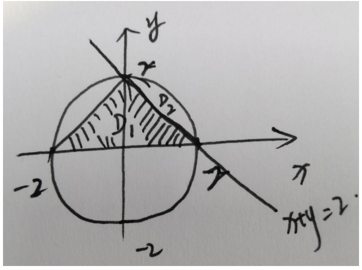
又$y(1)=\frac{1}{4}$，解得$C=\frac{1}{4}$，故$y(x)==-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2$，

因此弧长为$L=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$

$$=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right)\Big|_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1)\ .$$

19.已知平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|y-2\le x\le\sqrt{4-y^2}，0\le y\le 2\right\}$，计算$I=\iint_{\mathrm{D}}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy.$

解：从右图可知$D=D_1+D_2$，



$I=\iint_{D_1}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy+\iint_{D_2}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy$ ，

其中D_1关于y轴对称，

上式中$\iint_{D_1}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy=\iint_{D_1}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}dx\,dy+\iint_{D_1}\frac{2xy}{x^2+y^2}dx\,dy=\iint_{D_1}dx\,dy=4$，

$\iint_{D_2}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}^{2}\frac{r^2-2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}r\,dr$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}^{2}(1-\sin 2\theta)r\,dr\ =2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta\,(1-\sin 2\theta)}{1+\sin 2\theta}d\theta$

$=2\pi-6$，

故，$I=\iint_{D_1}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy+\iint_{D_2}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy=4+2\pi-6=2\pi-2.$

20.已知可微函数$f(u，v)$满足$\frac{\partial f(u，v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u，v)}{\partial v}=2(u-v)e^{-(u+v)}$且$f(u，0)=u^2e^{-u}.$

(1)记 $\mathrm{g}(x，y)=f(x，y-x)$，求$\frac{\partial \mathrm{g}(x，y)}{\partial x}$;

(2)求$f(u，v)$的表达式和极值.

解：(1)因为 $\mathrm{g}(x，y)=f(x，y-x)$，

所以$\frac{\partial \mathrm{g}(x，y)}{\partial x}=f'_1(x，y-x)-f'_2(x，y-x)$，

由题设条件可知：$f'_1(u,\ v) - f'_2(u,\ v) = 2(u-v)e^{-(u+v)}$，

所以代入上式，$\frac{\partial g(x,\ y)}{\partial x} = 2[x-(y-x)]e^{-(x+y-x)} = (4x-2y)e^{-y}$；

(2)$g(x,\ y) = f(x,\ y-x) = \int (4x-2y)e^{-y}\,dx = 2x(x-y)e^{-y} + C(y)$，

令$x=u$，$y-x=v$，则$f(u,\ v) =- 2uve^{-(u+v)} + C(u+v)$，

由$f(u,\ 0) = u^2e^{-u}$可得：$C(u) = u^2e^{-u}$

因此，$f(u,\ v) =- 2uve^{-(u+v)} + (u+v)^2e^{-(u+v)} = (u^2+v^2)e^{-(u+v)}$ ，

令$\begin{cases} f'_u = 2ue^{-(u+v)} - (u^2+v^2)e^{-(u+v)} = (2u-u^2-v^2)e^{-(u+v)} = 0 \\ f'_v = 2ve^{-(u+v)} - (u^2+v^2)e^{-(u+v)} = (2v-u^2-v^2)e^{-(u+v)} = 0 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} u=0, v=0 \\ u=1, v=1 \end{cases}$两组解；

$$\begin{cases} f''_{uu} = (2-2u)e^{-(u+v)} - (2u-u^2-v^2)e^{-(u+v)} = (2-4u+u^2+v^2)e^{-(u+v)} \\ f''_{uv} =- 2ve^{-(u+v)} - (2u-u^2-v^2)e^{-(u+v)} = (-2v-2u+u^2+v^2)e^{-(u+v)} \\ f''_{vv} = (2-2v)e^{-(u+v)} - (2v-u^2-v^2)e^{-(u+v)} = (2-4v+u^2+v^2)e^{-(u+v)} \end{cases},$$

当$u=0, v=0$ 时，$A=2, B=0, C=2$，$\begin{cases} AC-B^2>0 \\ A>0 \end{cases}$，因此(0,0)是极小值，且极小值为 0；

当$u=1, v=1$ 时，$A=0$，$B=-2$，$C=0$，$\begin{cases} AC-B^2<0 \\ A=0 \end{cases}$，因此(1,1)不是极值.

21.设函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内有二阶连续导数，证明：$f''(x)\ge 0$ 的充要条件是：对不同实数a，b，$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

解：$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$，$\xi$介于$x$与$\frac{a+b}{2}$之间，

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx$

$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \int_a^b \left[\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx$ ，

证明必要性：若$f''(x) \geq 0$，则$f''(\xi) \geq 0$，有$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，

证明充分性：若$\exists x_0$使得$f''(x) < 0$，因为$f(x)$有二阶连续导数，$\exists\delta$使得$f''(x)$在$\left[x_0-\delta，x_0+\delta\right]$内恒小于 0，令$x_0-\delta = a$，$x_0+\delta = b$，

$\int_a^b f(x)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \int_a^b \left[\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx < f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$，矛盾，故$f''(x) \geq 0$，

得证.

22.已知二次型$f\left(x_1，x_2，x_3\right) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$，

(1)求正交变换$\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$将$f\left(x_1，x_2，x_3\right)$化为标准形；

(2)证明$\min\limits_{x\neq 0}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = 2$.

解：(1)令$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\0 & 4 & 0\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}$，由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-3 & 0 & -1\\0 & \lambda-4 & 0\\-1 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix} = (\lambda-4)^2(\lambda-2) = 0$，

特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$，$\lambda_3 = 2$，

当$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ 时，$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x = 0$ 的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，

当$\lambda_3 = 2$ 时，$(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})x = 0$ 的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$单位化，$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

存在$\boldsymbol{Q} = \left(\boldsymbol{\eta}_1，\boldsymbol{\eta}_2，\boldsymbol{\eta}_3\right)$正交变换$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将$f\left(x_1，x_2，x_3\right)$化为标准形$f = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$.

(2)$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}$,

$\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}} = \frac{f(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}} = \frac{4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2} = 2 + \frac{2y_1^2+2y_2^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$,

当$y_1 = y_2 = 0$，$y_3 \neq 0$ 时，$\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}} = 2 + \frac{2y_1^2+2y_2^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$最小，最小值为 2，

即$\min\limits_{x\neq 0}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}} = 2$，得证.