

2021 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (二)

(科目代码:302)

一、选择题(1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 的().

- (A) 低阶无穷小 (B) 等价无穷小
(C) 高阶无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处().

- (A) 连续且取最大值 (B) 连续且取最小值
(C) 可导且导数等于零 (D) 可导且导数不为零

(3) 有一圆柱体,底面半径与高随时间变化的速率分别为 2 cm/s , -3 cm/s ,当底面半径为 10 cm ,高为 5 cm 时,圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为().

- (A) $125\pi \text{ cm}^3/\text{s}$, $40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ (B) $125\pi \text{ cm}^3/\text{s}$, $-40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$
(C) $-100\pi \text{ cm}^3/\text{s}$, $40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ (D) $-100\pi \text{ cm}^3/\text{s}$, $-40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$

(4) 设函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有两个零点,则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是().

- (A) $(e, +\infty)$ (B) $(0, e)$
(C) $(0, \frac{1}{e})$ (D) $(\frac{1}{e}, +\infty)$

(5) 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x = 0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$,则().

- (A) $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ (B) $a = 1, b = \frac{1}{2}$
(C) $a = 0, b = -\frac{1}{2}$ (D) $a = 0, b = \frac{1}{2}$

(6) 设函数 $f(x, y)$ 可微,且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$,则 $df(1, 1) =$ ().

- (A) $dx + dy$ (B) $dx - dy$ (C) dy (D) $-dy$

(7) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x) dx = (\quad)$.

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$

(8) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为().

(A) 2, 0

(B) 1, 1

(C) 2, 1

(D) 1, 2

(9) 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 则().

(A) $AX = 0$ 的解均为 $BX = 0$ 的解

(B) $A^T X = 0$ 的解均为 $B^T X = 0$ 的解

(C) $BX = 0$ 的解均为 $AX = 0$ 的解

(D) $B^T X = 0$ 的解均为 $A^T X = 0$ 的解

(10) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 若存在下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使得

PAQ 为对角矩阵, 则 P, Q 分别可以取().

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题(11 ~ 16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在题中的横线上.)

(11) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| 3^{-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1, \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan 2xy = 1$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 已知函数 $f(t) = \int_1^{t^2} dx \int_{\sqrt{x}}^t \sin \frac{x}{y} dy$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(15) 微分方程 $y''' - y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(16) 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(17 ~ 21 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

(18) (本题满分 12 分)

已知 $f(x) = \frac{x|x|}{1+x}$, 求 $f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6}x^2 - x + C$, L 为曲线 $y = f(x)$ ($4 \leq x \leq 9$), L 的弧长为 s , L 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面面积为 A , 求 s 与 A .

(20) (本题满分 12 分)

设 $y = y(x) (x > 0)$ 满足微分方程 $xy' - 6y = -6$, 且满足 $y(\sqrt{3}) = 10$,

(I) 求 $y(x)$;

(II) 设 P 为曲线 $y = y(x)$ 上的一点, 曲线 $y = y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_P , 为使 I_P 最小, 求 P 的坐标.

(21) (本题满分 12 分)

曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 (x \geq 0, y \geq 0)$ 与 x 轴围成的区域为 D , 求 $\iint_D xy dx dy$.

(22) (本题满分 12 分)

设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 \mathbf{A} 相似对角于对角矩阵, 求常数 a, b 的

值, 并求可逆矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 为对角矩阵.