

## 2021年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题及答案解析

### 数学（一）

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.）

$$(1) \text{函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \text{ 在 } x = 0 \text{ 处}$$

- (A) 连续且取极大值. (B) 连续且取极小值.  
(C) 可导且导数为 0. (D) 可导且导数不为 0.

【答案】D.

【解析】因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$ ，故  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续；

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处可导且导数为 } \frac{1}{2}.$$

(2) 设函数  $f(x, y)$  可微，且  $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$ ， $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ ，则  $df(1, 1) =$

- (A)  $dx + dy$ . (B)  $dx - dy$ . (C)  $dy$ . (D)  $-dy$ .

【答案】C.

【解析】 $f_1'(x+1, e^x) + e^x f_2'(x+1, e^x) = (x+1)^2 + 2x(x+1)$  ①

$$f_1'(x, x^2) + 2xf_2'(x, x^2) = 4x \ln x + 2x$$
 ②

分别将  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$  代入①②式有

$$f_1'(1, 1) + f_2'(1, 1) = 1, \quad f_1'(1, 1) + 2f_2'(1, 1) = 2$$

联立可得  $f_1'(1, 1) = 0$ ， $f_2'(1, 1) = 1$ ， $df(1, 1) = f_1'(1, 1)dx + f_2'(1, 1)dy = dy$ ，故正确答案为 C.

(3) 设函数  $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$  在  $x = 0$  处的 3 次泰勒多项式为  $ax + bx^2 + cx^3$ ，则

- (A)  $a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6}$ . (B)  $a = 1, b = 0, c = \frac{7}{6}$ .  
(C)  $a = -1, b = -1, c = -\frac{7}{6}$ . (D)  $a = -1, b = -1, c = \frac{7}{6}$ .

【答案】A.

【解析】根据麦克劳林公式有

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} = \left[ \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] \cdot \left[ 1 - x^2 + o(x^2) \right] = x - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

故  $a=1, b=0, c=-\frac{7}{6}$ , 本题选 A.

(4) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0,1]$  上连续, 则  $\int_0^1 f(x)dx =$

(A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$ .

(B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{n}\right) \frac{1}{n}$ .

(C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$ .

(D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{n}$ .

【答案】B.

【解析】由定积分的定义知, 将  $(0,1)$  分成  $n$  份, 取中间点的函数值, 则  $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$ , 即选 B.

(5) 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$  的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) 2, 0.

(B) 1, 1.

(C) 2, 1.

(D) 1, 2.

【答案】B.

【解析】 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2$

所以  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 故特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)\lambda$$

令上式等于零, 故特征值为  $-1, 3, 0$ , 故该二次型的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 1. 故应选 B.

(6) 已知  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 记  $\beta_1 = \alpha_1$ ,  $\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$ ,  $\beta_3 = \alpha_3 - l\beta_1 - l\beta_2$ ,

若  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  两两正交, 则  $l_1, l_2$  依次为

(A)  $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ .

(B)  $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ .

(C)  $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$ .

(D)  $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$ .

【答案】A.

【解析】利用施密特正交化方法知

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故  $l_1 = \frac{[\alpha_1, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} = \frac{5}{2}$ ,  $l_2 = \frac{[\alpha_2, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} = \frac{1}{2}$ , 故选 A.

(7) 设  $A, B$  为  $n$  阶实矩阵, 下列不成立的是

$$(A) r \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \\ A & BA \end{pmatrix} = 2r(A)$$

$$(C) r \begin{pmatrix} O & AA^T \end{pmatrix} = 2r(A)$$

$$(B) r \begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \\ A & O \end{pmatrix} = 2r(A)$$

$$(D) r \begin{pmatrix} BA & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$$

【答案】C.

【解析】(A)  $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix} = r(A) + r(A^T A) = 2r(A)$ . 故 A 正确.  
 (B)  $AB$  的列向量可由  $A$  的列线性表示, 故  $r \begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & O \\ 0 & A^T \end{pmatrix} = r(A) + r(A^T) = 2r(A)$ .  
 (C)  $BA$  的列向量不一定能由  $A$  的列线性表示.  
 (D)  $BA$  的行向量可由  $A$  的行线性表示, 故  $r \begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^T \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & O \\ 0 & A^T \end{pmatrix} = r(A) + r(A^T) = 2r(A)$ .

本题选 C.

(8) 设  $A, B$  为随机事件, 且  $0 < P(B) < 1$ , 下列命题中不成立的是

(A) 若  $P(A|B) = P(A)$ , 则  $P(A|\bar{B}) = P(A)$ .

(B) 若  $P(A|B) > P(A)$ , 则  $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$

(C) 若  $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ , 则  $P(A|B) > P(A)$ .

(D) 若  $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$ , 则  $P(A) > P(B)$ .

【答案】D.

【解析】 $P(A|A \cup B) = \frac{P(A(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(AB)}$   
 $P(\bar{A}|A \cup B) = \frac{P(\bar{A}(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(A) + P(B) - P(AB)}$

因为  $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$ , 固有  $P(A) > P(B) - P(AB)$ , 故正确答案为 D.

(9) 设  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  为来自总体  $N(\mu, \mu; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$  的简单随机样本, 令  $\theta = \mu - \mu, X = \bar{\sum}_{i=1}^n X_i, Y = \bar{\sum}_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$ , 则

(A)  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计,  $D(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

(B)  $\hat{\theta}$  不是  $\theta$  的无偏估计,  $D(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

(C)  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计,  $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(D)  $\hat{\theta}$  不是  $\theta$  的无偏估计,  $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

【答案】C.

【解析】因为  $X, Y$  是二维正态分布, 所以  $\bar{X}$  与  $\bar{Y}$  也服从二维正态分布, 则  $\bar{X} - \bar{Y}$  也服从二维正态分布, 即  $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu - \mu = \theta$ ,

$$D(\theta) = D(X - Y) = D(X) + D(Y) - \text{cov}(X, Y) = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 - 2\rho\sigma\sigma}{n} = \frac{1 - 2\rho}{n} \sigma^2, \text{ 故正确答案为 C.}$$

(10) 设  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  是来自总体  $N(\mu, 4)$  的简单随机样本, 考虑假设检验问题:

$H_0: \mu \leq 10, H_1: \mu > 10$ .  $\Phi(x)$  表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为  $W = \{\bar{X} \geq 11\}$ ,

其中  $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$ , 则  $\mu = 11.5$  时, 该检验犯第二类错误的概率为

- (A)  $1 - \Phi(0.5)$  (B)  $1 - \Phi(1)$   
 (C)  $1 - \Phi(1.5)$  (D)  $1 - \Phi(2)$

【答案】 B.

【解析】 所求概率为  $P\{\bar{X} < 11\}$   $\bar{X} \sim N(11.5, \frac{1}{4})$ ,

$$P\{\bar{X} < 11\} = P\left\{ \frac{\bar{X} - 11.5}{\frac{1}{2}} \leq \frac{11 - 11.5}{\frac{1}{2}} \right\} = 1 - \Phi(1)$$

故本题选 B.

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(11)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $\frac{\pi}{4}$

【解析】  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \arctan(x+1) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

(12) 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1, & x < 0 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2, & x \geq 0 \end{cases}$  确定, 则  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $\frac{2}{3}$ .

【解析】 由  $\frac{dy}{dx} = \frac{4te^t + 2t}{2e^t + 1}$ , 得  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(4e^t + 4te^t + 2)(2e^t + 1) - (4te^t + 2t)2e^t}{(2e^t + 1)^3}$ ,

将  $t = 0$  带入得  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \frac{2}{3}$ .

(13) 欧拉方程  $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$  满足条件  $y(1) = 1, y'(1) = 2$  得解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $x^2$ .

【解析】 令  $x = e^t$ , 则  $xy' = \frac{dy}{dt}, x^2 y'' = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}$ , 原方程化为  $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$ , 特征方程为  $\lambda^2 - 4 = 0$ , 特征根为  $\lambda = 2, \lambda = -2$ , 通解为  $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$ , 将初始条件  $y(1) = 1, y'(1) = 2$  带入得  $C_1 = 1, C_2 = 0$ , 故满足初始条件的解为  $y = x^2$ .

(14) 设  $\Sigma$  为空间区域  $\{(x, y, z) | x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$  表面的外侧, 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】  $4\pi$ .

**【解析】** 由高斯公式得原式 =  $\iiint_{\Omega} (2x+2y+1)dV = \int_0^2 dz \iint_D dx dy = 4\pi$ .

(15) 设  $A = a_{ij}$  为 3 阶矩阵,  $A_{ij}$  为代数余子式, 若  $A$  的每行元素之和均为 2, 且  $|A|=3$ ,  $A_{11} + A_{21} + A_{31} =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{3}{2}$ .

**【解析】**  $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $A\alpha = \lambda\alpha, \lambda=2, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 则  $A^*$  的特征值为  $\frac{|A|}{\lambda}$ , 对应的特征向量为  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $A^* \alpha = \frac{|A|}{\lambda} \alpha$  而  $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ ,  $A^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{21} + A_{31} \\ A_{12} + A_{22} + A_{32} \\ A_{13} + A_{23} + A_{33} \end{pmatrix} = \frac{|A|}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 即  $A_{11} + A_{21} + A_{31} = \frac{3}{2}$ .

(16) 甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中, 再从乙盒中任取一球. 令  $X, Y$  分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数, 则  $X$  与  $Y$  的相关系数 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{1}{5}$ .

**【解答】** 联合分布率  $(X, Y) \sim \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 10 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$   
 $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{20}$ ,  $DX = \frac{1}{4}$ ,  $DY = \frac{1}{4}$ , 即  $\rho_{XY} = \frac{1}{5}$ .

三、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$ .

**【答案】**  $\frac{1}{2}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1 - \int_0^x e^{t^2} dt}{(e^x - 1) \sin x}$

又因为  $\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^x (1 + t^2 + o(t^2)) dt = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ , 故

原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3))(1 + x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)) - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

(18)(本题满分 12 分)

设  $u_n(x) = e^{-nx} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛域及和函数.

【答案】 
$$S(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} (1-x) \ln(1-x) + x, & x \in (0, 1) \\ e^{-1}, & x = 1 \\ \frac{1}{e-1}, & \end{cases}$$

【解析】

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx} x^{n+1}}{n(n+1)}, \text{ 收敛域 } (0, 1], S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}, x \in (0, 1]$$

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x \ln(1-x) - [-\ln(1-x) - x]$$

$$= (1-x) \ln(1-x) + x, \quad x \in (0, 1)$$

$$S_2(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S_2(x) = 1$$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} (1-x) \ln(1-x) + x, & x \in (0, 1) \\ e^{-1}, & x = 1 \\ \frac{1}{e-1}, & \end{cases}$$

(19)(本题满分 12 分)

已知曲线  $C: \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6 \\ 4x + 2y + z = 30 \end{cases}$ , 求  $C$  上的点到  $xoy$  坐标面距离的最大值.

【答案】 66

【解析】 设拉格朗日函数  $L(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - z - 6) + \mu(4x + 2y + z - 30)$

$$L'_x = 2x\lambda + 4\mu = 0$$

$$L'_y = 4y\lambda + 2\mu = 0$$

$$L'_z = 2z - \lambda + \mu = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - z = 6$$

$$4x + 2y + z = 30$$

解得驻点:  $(4, 1, 12), (-8, -2, 66)$

$C$  上的点  $(-8, -2, 66)$  到  $xoy$  面距离最大为 66.

(20)(本题满分 12 分)

设  $D \subset R^2$  是有界单连通闭区域,  $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$  取得最大值的积分区域记为  $D$ .

(1) 求  $I(D_1)$  的值.

(2) 计算  $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2}$ , 其中  $\partial D_1$  是  $D_1$  的正向边界.

【答案】  $-\pi$ .

【解析】 (1) 由二重积分的几何意义知:  $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) d\sigma$ , 当且仅当  $4 - x^2 - y^2$  在  $D$  上大于 0 时,  $I(D)$  达到最大, 故  $D: x^2 + y^2 \leq 4$  且  $I(D) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r dr = 8\pi$ .

(2) 补  $D_2: x_2 + 4y_2 = r_2$  ( $r$  很小), 取  $D$  的方向为顺时针方向,

$$\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial D_1 + \partial D_2} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} - \int_{\partial D_2} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} \\
&= -\frac{1}{r} e^{r^2} \int_{\partial D_2} xdx + 4ydy - \frac{1}{r} e^{r^2} \int_{\partial D_2} ydx - xdy = \frac{1}{r^2} \iint_{D_2} -2d\sigma = -\pi.
\end{aligned}$$

(21)(本题满分 12 分)

已知  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ .

(1) 求正交矩阵  $P$ , 使得  $P^T A P$  为对角矩阵;

(2) 求正定矩阵  $C$ , 使得  $C^2 = (a+3)E - A$ .

【答案】(1)  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{3}}{1} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ ; (2)  $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ .

【解析】

(1) 由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a + 1)^2(\lambda - a - 2) = 0$

得  $\lambda_1 = a + 2, \lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$

当  $\lambda = a + 2$  时

$((a+2)E - A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  的特征向量为  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

当  $\lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$  所

$((a-1)E - A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  的特征向量为  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ ? \end{pmatrix}$ ,

令  $P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ , 则  $P^T A P = \Lambda = \begin{pmatrix} a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1 \end{pmatrix}$ ,

(2)  $P^T C^2 P = P^T (a+3)E - A) P = ((a+3)E - \Lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P^T C P P^T C P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P^T C P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } C = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^T = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

(22)(本题满分 12 分)

在区间(0, 2) 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短的一段长度记为  $X$ , 较长的一段长度记为  $Y$ , 令  $Z = \frac{Y}{X}$ .

(1) 求  $X$  的概率密度;

(2) 求  $Z$  的概率密度.

(3) 求  $E\left(\frac{X}{Y}\right)$ .

$$\begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, & z \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【答案】(1)  $X \sim f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ; (2)  $f_z(z) = (F_z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, & z \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ . (3)  $-1 + 2 \ln 2$ .

【解析】(1) 由题知:  $X \sim f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ;

(2) 由  $Y = 2 - X$ , 即  $Z = \frac{2 - X}{X}$ , 先求  $Z$  的分布函数:

$$F_z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2 - X}{X} \leq z\right\} = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\}$$

当  $z < 1$  时,  $F_z(z) = 0$ ;

$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时, } F_z(z) = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\} = 1 - P\left\{X \leq \frac{2}{z+1}\right\} = 1 - \int_0^{\frac{2}{z+1}} 1 dx = 1 - \frac{2}{z+1};$$

$$f_z(z) = (F_z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, & z \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

$$(3) E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_0^1 \frac{x}{2-x} \cdot 1 dx = -1 + 2 \ln 2.$$