2019 年考研数学一真题

一、选择题　1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．当 $x \to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

2．设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, & x \le 0 \\ x\ln x, x>0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

（A）可导点，极值点　　（B）不可导的点，极值点

（C）可导点，非极值点　　（D）不可导点，非极值点

3．设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{u_n}$　　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$

4．设函数 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$，如果对于上半平面 $(y>0)$ 内任意有向光滑封闭曲线 C 都有

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

那么函数 $P(x,y)$ 可取为（　　）

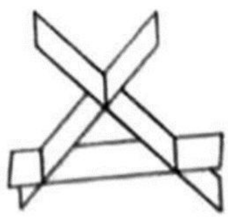
（A）$y-\dfrac{x^2}{y^2}$　　（B）$\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^2}$　　（C）$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$　　（D）$x-\dfrac{1}{y}$

5．设 A 是三阶实对称矩阵，E 是三阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 x^TAx 的规范形是

（　　）

（A） $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　**（B）** $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　**（C）** $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　**（D）** $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

6．如图所示，有三张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i(i=1,2,3)$ 组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\overline{A}$，则（　　）



（A）$r(A)=2,r(\overline{A})=3$　　（B）$r(A)=2,r(\overline{A})=2$

（C）$r(A)=1,r(\overline{A})=2$　　（D）$r(A)=1,r(\overline{A})=1$

7．设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是　　（　　）

（A）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$

（C）$P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　　　（D）$P(AB)=P(\overline{AB})$

8．设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$．则 $P\{|X-Y|<1\}$（　　）

（A）与 μ 无关，而与 σ^2 有关　　　（B）与 μ 有关，而与 σ^2 无关

（C）与 μ，σ^2 都有关　　　（D）与 μ，σ^2 都无关

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9．设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

10．微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解为 $y=$______________.

11.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$____________.

看不清楚题目是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 还是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$，我以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 给出解答.

12．设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geq 0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

13．设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为三阶矩阵，若 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为______________.

14．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x<2\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$，$F(x)$ 为其分布函数，$E(X)$ 其数学期望，则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=$________.

三、解答题

15．（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

（1）求 $y(x)$；（2）求曲线 $y=y(x)$ 的凸凹区间及拐点.

16.（本题满分 10 分）设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿方向 $\vec{l}=-3\vec{i}-4\vec{j}$ 的方向导数最大，最大值为 10.

（1）求常数 a,b 之值；（2）求曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geq 0)$ 的面积.

17．（本题满分 10 分）求曲线 $y=e^{-x}\sin x\ (x\geq 0)$ 与 x 轴之间形成图形的面积.

18．（本题满分 10 分）设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\quad(n=0,1,2,\cdots)$

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots)$；（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

19．（本题满分 10 分）设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-2)^2=(1-z)^2\quad(0\leq z\leq 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

20．（本题满分 11 分）设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$ 为 R^3 空间的一组基，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 在这组基下的坐标为 $\begin{pmatrix}b\\c\\1\end{pmatrix}$.

（1）求 a,b,c 之值；

（2）证明：α_2,α_3,β 也为 R^3 空间的一组基，并求 α_2,α_3,β 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵.

21．（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 x,y 之值；（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

22．（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为：$P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p$，$(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

（1）求 Z 的概率密度；（2）p 为何值时，X,Z 不相关；（3）此时，X,Z 是否相互独立.

23．（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geq\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$，其中 μ 是已知参数，σ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求常数 A 的值；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.