2018 年硕士研究生入学考试

数学一 试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1） 下列函数不可导的是：

$(A)\ y = |x|\sin|x|$

$(B)\ y = |x|\sin\sqrt{|x|}$

$(C)\ y = \cos|x|$

$(D)\ y = \cos\sqrt{|x|}$

（2）过点（1,0,0）与（0,1,0）且与$z=x^2+y^2$相切的平面方程为

$(A)\ z = 0$与$x + y - z = 1$

$(B)\ z = 0$与$2x + 2y - z = 2$

$(C)\ y = x$与x+y-z=1

$(D)\ y = x$与$2c + 2y - z = 2$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} =$

$(A)\ \sin 1 + \cos 1$

$(B)\ 2\sin 1 + \cos 1$

$(C)\ \sin 1 + \cos 1$

$(D)\ 3\sin 1 + 2\cos 1$

（4）$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$　　$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x}dx$　　$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sqrt{\cos x})dx$ ），则 M,N,K 的大小关系为

$(A)\ M > N > K$

$(B)\ M > K > N$

$(C)\ K > M > N$

$(D)\ N > M > K$

（5）下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为______.

A.$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B.$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C.$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D.$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（6）.设A，B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，$(X\quad Y)$ 表示分块矩阵，则

A.$r(A\quad AB)=r(A)$　　B.$r(A\quad BA)=r(A)$

C.$r(A\quad B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　D.$r(A\quad B)=r(A^T\quad B^T)$

（7）设$f(x)$为某分部的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则$p\{X\quad 0\}=$____________.

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.6

（8）给定总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，给定样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，对总体均值μ进行检验，令$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则

A．若显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.01$时也拒绝H_0.

B. 若显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时拒绝H_0.

C. 若显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.01$时接受H_0.

D. 若显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时也接受H_0.

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$, 则 $k=$______

（10）$y=f(x)$ 的图像过（0,0），且与 $y=a^x$ 相切与（1,2），求 $\int_0^1 xf'(x)dx=$ ___

（11）$F(x,y,z)=xy\vec{\varepsilon}-yz\vec{\eta}+xz\vec{k}$, 求 $rot\overrightarrow{F}(1,1,0)=$ ________

（12）曲线 S 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=0$ 相交而成，求 $\oint xydS=$ _________

（13）二阶矩阵 A 有两个不同特征值，α_1,α_2 是 A 的线性无关的特征向量，

$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2)$, 则 $|A|=$ ______

（14）A,B 独立，A,C 独立，$BC\neq\phi, P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(AC|AB\bigcup C)=\dfrac{1}{4}$, 则 $P(C)=$

______

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）. 求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

（16）. 一根绳长 2m，截成三段，分别折成圆、三角形、正方形，这三段分别为多长是所得的面积总和最小，并求该最小值。

（17）. $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 取正面，求 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$

（18）微分方程 $y'+y=f(x)$

（I）当 $f(x)=x$ 时，求微分方程的通解.

（II）当 $f(x)$ 为周期函数时，证微分方程有通解与其对应，且该通解也为周期函数.

（19）数列 $\{x_n\}$，$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$.证：$\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（20）设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$, 其中 a 是参数，

（I）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解

（II）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形

（21）已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{bmatrix}$ 可经初等变换化为矩阵 $B=\begin{bmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

（I）求 a

（II）求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P

（22）X,Y 随机变量相互独立，$P\{X=1\}=y_1$，$P\{X=-1\}=y_2$，Y 服从 λ 的泊松分布.

$Z=XY$

（1）求 $\operatorname{cov}(X,Z)$.

（2）求 Z 得概率分布.

（23）$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 X 的分布，$f(x)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$（$\sigma$ 未知，$-\infty<x<+\infty$）.

（1）求 σ 得极大似然估计.

（2）求 $E(\hat{\sigma})$，$D(\hat{\sigma})$.