2017 年硕士研究生入学考试

数学一 试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

$(A)ab=\dfrac{1}{2}$　　　　$(B)ab=-\dfrac{1}{2}$

$(C)ab=0$　　　　$(D)ab=2$

（2）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　　）

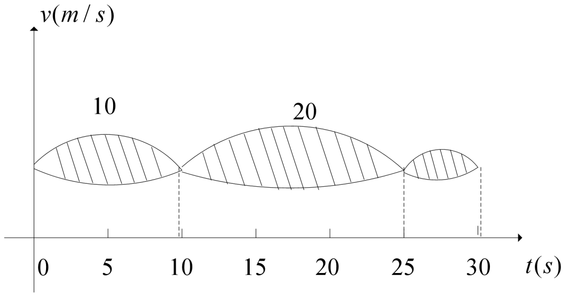
$(A)f(1)>f(-1)$　　$(B)f(1)<f(-1)$

$(C)|f(1)|>|f(-1)|$　　$(D)|f(1)|<|f(-1)|$

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $u=(1,2,2)$ 的方向导数为（　　）

$(A)12$　　$(B)6$　　$(C)4$　　$(D)2$

（4）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位：s），则（　　）



$(A)t_0=10$　　$(B)15<t_0<20$　　$(C)t_0=25$　　$(D)t_0>25$

（5）设 α 是 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则（　　）

$(A)E-\alpha\alpha^T$不可逆　　$(B)E+\alpha\alpha^T$不可逆

$(C)E+2\alpha\alpha^T$不可逆　　$(D)E-2\alpha\alpha^T$不可逆

（6）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,则（　）

(A) A与C相似,B与C相似　　(B) A与C相似,B与C不相似

(C) A与C不相似,B与C相似　　(D) A与C不相似,B与C不相似

（7）设 A,B 为随机概率，若 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，则 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$ 的充分必要条件是（　）

$(A)P(B|A)>P(B|\overline{A})$　　$(B)P(B|A)<P(B|\overline{A})$

$(C)P(\overline{B}|A)>P(B|\overline{A})$　　$(D)P(\overline{B}|A)<P(B|\overline{A})$

（8）设 $X_1,X_2\cdots X_n(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是（　）

$(A)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$服从$\chi^2$分布　　$(B)2(X_n-X_1)^2$服从χ^2分布

$(C)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$服从$\chi^2$分布　　$(D)n(\bar{X}-\mu)^2$服从χ^2分布

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$__________

(10) 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$_________

(11) 若曲线积分 $\int_L\frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则

$a=$__________

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$________

（13）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为________________

（14）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$________

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

（16）（本题满分 10 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0,\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

(I) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(Π) 方程 $f(x)f^{'}(x)+(f^{'}(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

（19）（本题满分 10 分）

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为

$\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。记圆锥面与柱面的交线为 C

(I) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

(Π) 求 S 的 M 质量。

（20）（本题满分 11 分）设 3 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\right)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

(I) 证明 $r(A)=2$；

(Π) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

（21）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$

在正交变换 $X=QY$ 下的标准型 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(I) 求 $P(Y\le EY)$

(Π) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

（23）（本题满分 11 分）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2\cdots X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=\left|X_i-\mu\right|(i=1,2,\cdots n)$，利用 $Z_1,Z_2\cdots Z_n$ 估计 σ。

(I) 求 Z_i 的概率密度；

(Π) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量