

2016 考研真题完整版

数学 (一)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛, 则 ()

(A) $a < 1$ 且 $b > 1$ (B) $a > 1$ 且 $b > 1$ (C) $a < 1$ 且 $a + b > 1$ (D) $a > 1$ 且 $a + b > 1$

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ()

(A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

(3) 若 $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 则 $q(x) = ()$

(A) $3x(1+x^2)$ (B) $-3x(1+x^2)$ (C) $\frac{x}{1+x^2}$ (D) $-\frac{x}{1+x^2}$

(4) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$, 则 ()

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点 (B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导 (D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

(5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ()

(A) A^T 与 B^T 相似 (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似 (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为 ()

(A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面 (C) 椭球面 (D) 柱面

(7) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则 ()

(A) p 随着 μ 的增加而增加 (B) p 随着 σ 的增加而增加
(C) p 随着 μ 的增加而减少 (D) p 随着 σ 的增加而减少

(8) 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将

试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为 ()

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(10) 向量场 $A(x, y, z) = (x + y + z)i + xyj + zk$ 的旋度 $\text{rot}A = \underline{\hspace{2cm}}$

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(12) 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$, 且 $f''(0) = 1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分) 已知平面区域 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$.

(16) (本题满分 10 分) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(I) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛；

(II) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值.

(17) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y+1, L_t$

是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线, 计算曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并

求 $I(t)$ 的最小值

(18) 设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧,

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1)dydz - 2ydzdx + 3zdx dy$

(19) (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$, 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$, 证明:

(I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

(20) (本题满分 11 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$

当 a 为何值时, 方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解?

(21) (本题满分 11 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(I) 求 A^{99}

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

(22) (本题满分 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$$

- (I) 写出 (X, Y) 的概率密度；
- (II) 问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；
- (III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$ 。

(23) 设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数，

X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$ 。

- (1) 求 T 的概率密度
- (2) 确定 a ，使得 aT 为 θ 的无偏估计

