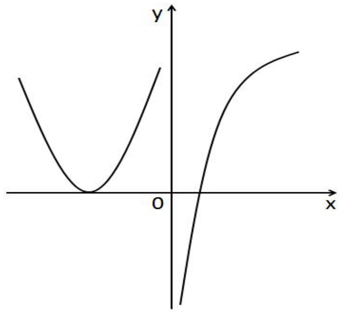
2015 年考研真题

数学一 试题

一、选择题

（1）设函数 $f(x)$ 在（$-\infty, +\infty$）连续，其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（）

（A）0　（B）1　(C) 2　(D) 3



（2）设$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$是二阶常系数非齐次线性微分方程$y''+ay'+by=ce^{x}$的一个特解，则：

(A)$a=-3, b=-1, c=-1.$

(B)$a=3, b=2, c=-1.$

(C)$a=-3, b=2, c=1.$

(D)$a=3, b=2, c=1.$

(3)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n\,(x-1)^n$的：

(A)收敛点，收敛点.

(B)收敛点，发散点.

(C)发散点，收敛点.

(D)发散点，发散点.

（4）设 D 是第一象限中曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$

（A） $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$ （B） $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

卡巴学长

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$ (D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

（5）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 4 & a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ d\\ d^2\end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解的充分必要条件为

（A）$a\notin\Omega, d\notin\Omega$（B）$a\notin\Omega, d\in\Omega$（C）$a\in\Omega, d\notin\Omega$（D）$a\in\Omega, d\in\Omega$

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$（B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$（C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

（7）若 A,B 为任意两个随机事件，则

（A）$P(AB)\le P(A)P(B)$（B）$P(AB)\ge P(A)P(B)$

（C）$P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$（D）$P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

(8)设随机变量X, Y不相关，且 $EX=2, EY=1, DX=3$, 则 $E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=$

(A) -3 (B) 3 (C) -5 (D) 5

二、填空题

（9）

（10） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=$ ______

（11）若函数由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$ ______.

（12）设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$ ______

（13）n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ ______

（14）设二维随机变量服从正态分布，则.

三、解答题

（15）设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\cdot\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a，b，k 值。

（16）设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成的区域的面积为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ **的表达式。**

（17）已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

（18）（本题满分 10 分）

（Ⅰ）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v(x)'$$

（Ⅱ）设函数 $u_1(x),u_2(x)\ldots u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\ldots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

（19）（本题满分 10 分）

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$ 起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分 $I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$

（20）（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$。

（Ⅰ）证明向量组 β_1,β_2,β_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基；

（Ⅱ）当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同，并求出所有的 ξ。

（21）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 a,b 的值.

（Ⅱ）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数.

（Ⅰ）求 Y 的概率分布；

（Ⅱ）求 EY.

卡巴学长

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta} & \theta\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，X_1，$X_2.....X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

（Ⅰ）求 θ 的矩估计.

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计.