

2014 年硕士研究生入学考试 数学一试题

一、选择题 1—8 小题. 每小题 4 分, 共 32 分.

1. 下列曲线有渐近线的是 ()

- (A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$ (C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

2. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在 $[0,1]$ 上 ()

- (A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$
(C) 当 $f''(x) \leq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (D) 当 $f''(x) \leq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

3. 设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dy = ()$

- (A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$
(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y) dy$
(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) dr$
(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$

4. 若函数 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a,b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$, 则

$a_1 \cos x + b_1 \sin x = ()$

- (A) $2 \sin x$ (B) $2 \cos x$ (C) $2\pi \sin x$ (D) $2\pi \cos x$

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 等于 ()

- (A) $(ad - bc)^2$ (B) $-(ad - bc)^2$ (C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$ (D) $-a^2 d^2 + b^2 c^2$

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量, 则对任意的常数 k, l , 向量 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ()

(A) 必要而非充分条件 (B) 充分而非必要条件 (C) 充分必要条件 (D) 非充分非必要条件

7. 设事件 A, B 相互独立, $P(B) = 0.5, P(A-B) = 0.3$ 则 $P(B-A) =$ ()

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

8. 设连续型随机变量 X_1, X_2 相互独立, 且方差均存在, X_1, X_2 的概率密度分别为 $f_1(x), f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}(f_1(y) + f_2(y))$, 随机变量 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, 则 ()

(A) $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$ (B) $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$
(C) $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$ (D) $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

9. 曲面 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处的切平面方程为_____.

10. 设 $f(x)$ 为周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

11. 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足 $y(1) = e^3$ 的解为_____.

12. 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 和平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正方向往负方向看是逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L zdx + ydz =$ _____.

13. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围是_____.

14. 设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 其中 θ 是未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n

是来自总体的简单样本, 若 $C \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计, 则常数 $C =$ _____.

三、解答题

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t) dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

16. (本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

17. (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$. 若

$f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

18. (本题满分 10 分)

设曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$ 的上侧, 计算曲面积分:

$$\iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1)dxdy$$

(1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

(2) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

19. (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

20. (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(3) 求方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系;

(4) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵.

21. (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

22. (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的分布为 $P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i), i=1, 2$.

(5) 求 Y 的分布函数;

(6) 求期望 $E(Y)$.

23. (本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x, \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 其中 θ 为未知的大于零的参数,

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体的简单随机样本,

(1) 求 $E(X), E(X^2)$; (2) 求 θ 的极大似然估计量.

(3) 是否存在常数 a , 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - a\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$.

