2013 硕士研究生入学考试

数学一试题

1.已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$**，其中 k，c 为常数，且** $c\neq 0$**，则（　）**

A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　**B.** $k=2,c=\dfrac{1}{2}$　**C.** $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　**D.** $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

2.曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ **在点** $(0,1,-1)$ **处的切平面方程为（　）**

A. $x-y+z=-2$　**B.** $x+y+z=0$　**C.** $x-2y+z=-3$　**D.** $x-y-z=0$

3.设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\cdots)$，**令** $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，

则 $S(-\dfrac{9}{4})=$ **（　）**

A . $\dfrac{3}{4}$　**B.** $\dfrac{1}{4}$　**C.** $-\dfrac{1}{4}$　**D.** $-\dfrac{3}{4}$

4.设 $L_1:x^2+y^2=1$，$L_2:x^2+y^2=2$，$L_3:x^2+2y^2=2$，$L_4:2x^2+y^2=2$ **为四条逆时针方向的平面曲线，记** $I_i=\oint\limits_{L_i}(y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，**则**

$\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

A. I_1　**B.** I_2　**C.** I_3　**D** I_4

5.设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 AB=C，且 B 可逆，则（　　）

A.矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

B 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

C 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

D 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

6.矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ **与** $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ **相似的充分必要条件为（　　）**

A. $a=0,b=2$　**B.** $a=0,b$ **为任意常数**

C. $a=2,b=0$ **D.** $a=2,b$ **为任意常数**

7.设 X_1,X_2,X_3 **是随机变量，且** $X_1\sim N(0,1)$**，** $X_2\sim N(0,2^2)$**，** $X_3\sim N(5,3^2)$**，** $P_i=P\{-2\le X_i\le 2\}(i=1,2,3)$**，则（ ）**

A. $P_1>P_2>P_3$ **B.** $P_2>P_1>P_3$

C. $P_3>P_2>P_2$ **D** $P_1>P_3>P_2$

8.设随机变量 $X\sim t(n)$**,** $Y\sim F(1,n)$**，给定** $a(0<a<0.5)$**，常数 c 满足** $P\{X>c\}=a$**，则**

$P\{Y>c^2\}$ **=( )**

9.设函数 *y=f(x)* 由方程 *y-x=e*$^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to 0} n[f(\frac{1}{n})-1]$ **＝____。**

10.已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解 *y*=____。

11.设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ (t为参数)，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ _____。

12. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ _______。

13.设 A=(a_{ij})是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.若 $a_{ij}+A_{ij}=0$(i，j=1,2,3)，则｜A｜＝______。

14.设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则 P{Y≤a+1|Y＞a}=

三．解答题：

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$**，其中 *f(x)*＝** $\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}dt.$

(16)(本题 10 分)

设数列｛a_n｝满足条件： $a_0=3, a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq 2)$. **S（x）是幂级数**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数.

（1）证明： $S''(x)-S(x)=0$;

（2）求 $S(x)$的表达式.

（17）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 *f(x)* 在 $[-1,1]$ **上具有二阶导数，且 *f*(1)=1，证明：**

（I）存在 $\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$.

（II）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19.(本题满分 10 分)

设直线 L 过 A（1,0,0），B（0,1,1）两点将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ**，** Σ **与平面** $z=0, z=2$ **所围成的立体为** Ω **。**

（1）求曲面 Σ 的方程；

（2）求 Ω 的形心坐标。

20.（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 AC-CA=B，并求所有矩阵 C。

21.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（1）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（2）若 α,β 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$。

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 令随机变量

$$Y=\begin{cases}2, & x\le 1,\\ x, & 1<x<2,\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

（1）求 Y 的分布函数；

（2）求概率 $P\{X \le Y\}$**.**

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$ **其中** θ **为未知参数且大于零，** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **为来自总体 X 的简单随机样本。**

（1）求 θ **的矩估计量；**

（2）求 θ **的最大似然估计量。**