2012 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试卷

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0　　**（B）1**　　**（C）2**　　**（D）3**

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　**（B）**$(-1)^n(n-1)!$　　**（C）**$(-1)^{n-1}n!$　　**（D）**$(-1)^n n!$

（3）如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是（　　）

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

（4）设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}$ **sin$x$dx(k=1,2,3),则有 D**

（A）$I_1< I_2 <I_3$.　　**(B)** $I_2< I_2< I_3$.

(C) $I_1< I_3 <I_1$,　　**(D)** $I_1< I_2< I_3$.

（5）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，

则下列向量组线性相关的是（　　）

（A） $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　**（B）** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　**（C）** $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

（D） $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

（6）设 A **为 3 阶矩阵，** P **为 3 阶可逆矩阵，且** $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$**，**

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$**，** $Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ **则** $Q^{-1}AQ=$ **（　　）**

（A） $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　　**（B）** $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

（C） $\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　　**（D）** $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

（7）设随机变量 x 与 y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $p\{x<y\}=$ **（）**

$(A)\frac{1}{5}$　　$(B)\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{2}{5}$　　$(D)\frac{4}{5}$

（8）将长度为 1m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为（） $(A)\ \ 1$　$(B)\ \ \frac{1}{2}$　$(C)\ \ -\frac{1}{2}$　$(D)\ \ -1$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）若函数 $f(x)$ **满足方程** $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ **及** $f'(x)+f(x)=2e^x$**，则** $f(x)=$__________。

（10） $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx$ __________。

（11） $\operatorname{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}$ ________。

（12）设 $\sum=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\}$,则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 ds=$________。

（13）设 X 为三维单位向量，E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-xx^T$ 的秩为________。

（14）设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$,$P(C)=\dfrac{1}{3}$,则 $P(AB\bar{C})=$________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\dfrac{x^2}{2},-1<x<1$

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=xe-\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

（17）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

（18）（本题满分 10 分）

已知曲线

，其中函数$f(t)$具有连续导数，且$f(0)=0$，$f(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$。若曲线 **L** 的切线与 **x** 轴的交点到切点的距离恒为 **1**，求函数$f(t)$的表达式，并求此曲线 **L** 与 **x** 轴与 **y** 轴无边界的区域的面积。

（19）（本题满分 10 分）

已知L是第一象限中从点$(0,0)$沿圆周$x^2+y^2=2x$到点$(2,0)$，再沿圆周$x^2+y^2=4$到点$(0,2)$的曲线段，计算曲线积分$J=\int_L 3x^2ydx+\left(x^2+x-2y\right)dy$。

（20）（本题满分 10 分）

设$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（I）求$|A|$

（II）已知线性方程组$Ax=b$有无穷多解，求a，并求$Ax=b$的通解。

（21）（本题满分 10 分）三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{pmatrix}$，$A^T$为矩阵$A$的转置，已知$r(A^TA)=2$，且二次型$f=x^TA^TAx$。

1）求a　　　　2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

（22）（本题满分 10 分）

已知随机变量 X,Y 以及 XY 的分布律如下表所示，

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求：**(1)** $P(X=2Y)$；　**(2)** $\operatorname{cov}(X-Y,Y)$ 与 ρ_{XY}.

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$，设 $Z=X-Y$，

(1) 求 z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$；

(2) 设 $z_1,z_2,\cdots z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\overline{\sigma}^2$；

(3) 证明 $\overline{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。