

## 2011 年全国硕士研究生入学统一考试

### 数学一试题

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求, 请将所选项前的字母填在答题卡指定位置上.

(1) 曲线  $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$  的拐点是( )

- (A) (1,0). (B) (2,0). (C) (3,0). (D) (4,0).

(2) 设数列  $\{a_n\}$  单调减少,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  ( $n=1,2,\dots$ ) 无界, 则幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$  的收敛域为( )

- (A)  $(-1,1]$ . (B)  $[-1,1)$ . (C)  $[0,2)$ . (D)  $(0,2]$ .

(3) 设函数  $f(x)$  具有二阶连续导数, 且  $f(x) > 0$ ,  $f'(0) = 0$ , 则函数  $z = f(x) \ln f(y)$

在点  $(0,0)$  处取得极小值的一个充分条件是( )

- (A)  $f(0) > 1$ ,  $f''(0) > 0$ . (B)  $f(0) > 1$ ,  $f''(0) < 0$ .

- (C)  $f(0) < 1$ ,  $f''(0) > 0$ . (D)  $f(0) < 1$ ,  $f''(0) < 0$ .

(4) 设  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$ ,  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$ ,  $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$ , 则  $I, J, K$  的大

小关系是( )

- (A)  $I < J < K$ . (B)  $I < K < J$ .

- (C)  $J < I < K$ . (D)  $K < J < I$ .

(5) 设  $A$  为 3 阶矩阵, 将  $A$  的第 2 列加到第 1 列得矩阵  $B$ , 再交换  $B$  的第 2 行与第 3

行得单位矩阵, 记  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A =$  ( )

- (A)  $P_1 P_2$ . (B)  $P_1^{-1} P_2$ . (C)  $P_2 P_1$ . (D)  $P_2 P_1^{-1}$ .

(6) 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  是 4 阶矩阵,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 若  $(1, 0, 1, 0)^T$  是方程组

$Ax = 0$  的一个基础解系, 则  $A^*x = 0$  的基础解系可为( )

- (A)  $\alpha_1, \alpha_3$ . (B)  $\alpha_1, \alpha_2$ . (C)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . (D)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

(7) 设  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  为两个分布函数, 其相应的概率密度  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  是连续函数, 则必为概率密度的是( )

- (A)  $f_1(x)f_2(x)$ . (B)  $2f_2(x)F_1(x)$ .  
(C)  $f_1(x)F_2(x)$ . (D)  $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$ .

(8) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $E(X)$  与  $E(Y)$  存在, 记  $U = \max\{X, Y\}$ ,  $V = \min\{X, Y\}$  则  $E(UV) = ( )$

- (A)  $E(U) \cdot E(V)$ . (B)  $E(X) \cdot E(Y)$ .  
(C)  $E(U) \cdot E(Y)$ . (D)  $E(X) \cdot E(V)$ .

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线  $y = \int_0^x \tan t dt (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4})$  的弧长  $s =$  \_\_\_\_\_.

(10) 微分方程  $y' + y = e^{-x} \cos x$  满足条件  $y(0) = 0$  的解为  $y =$  \_\_\_\_\_.

(11) 设函数  $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$ , 则  $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} =$  \_\_\_\_\_.

(12) 设  $L$  是柱面方程  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $z = x + y$  的交线, 从  $z$  轴正向往  $z$  轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分  $\oint_L xz dx + xdy + \frac{y^2}{2} dz =$  \_\_\_\_\_.

(13) 若二次曲面的方程  $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ , 经过正交变换化为  $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

(14) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$ , 则  $E(XY^2) =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$ .

(16)(本题满分 9 分)

设函数  $z = f(xy, yg(x))$ ，其中函数  $f$  具有二阶连续偏导数，函数  $g(x)$  可导且在  $x = 1$

处取得极值  $g(1) = 1$ ，求  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$  .

(17)(本题满分 10 分)

求方程  $k \arctan x - x = 0$  不同实根的个数，其中  $k$  为参数.

(18)(本题满分 10 分)

(I) 证明：对任意的正整数  $n$ ，都有  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$  成立.

(II) 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \cdots)$ ，证明数列  $\{a_n\}$  收敛.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数  $f(x, y)$  具有二阶连续偏导数，且  $f(1, y) = 0$ ， $f(x, 1) = 0$ ，

$\iint_D f(x, y) dx dy = a$ ，其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ，

计算二重积分  $I = \iint_D xy f_{xy}''(x, y) dx dy$  .

(20)(本题满分 11 分)

设向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ , 不能由向量组  $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  
 $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$ ,  $\beta_3 = (3, 4, a)^T$  线性表示.

(I) 求  $a$  的值;

(II) 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

$A$  为三阶实对称矩阵,  $A$  的秩为 2, 即  $r(A) = 2$ , 且  $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

(I) 求  $A$  的特征值与特征向量;

(II) 求矩阵  $A$ .

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  的概率分布分别为

$X$	0	1
$P$	1/3	2/3

$Y$	-1	0	1
$P$	1/3	1/3	1/3

且  $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ .

(I) 求二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布;

(II) 求  $Z = XY$  的概率分布;

(III) 求  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ .

(23) (本题满分 11 分)

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $N(\mu_0, \sigma^2)$  的简单随机样本, 其中  $\mu_0$  已知,  $\sigma^2 > 0$  未知.  $\bar{X}$  和  $S^2$  分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数  $\sigma^2$  的最大似然估计量  $\hat{\sigma}^2$ ;

(II) 计算  $E(\hat{\sigma}^2)$  和  $D(\hat{\sigma}^2)$ .