2010 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$

(A)1 **(B)**e

(C)e^{a-b} **(D)**e^{b-a}

(2)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A)x **(B)**z

(C)$-x$ **(D)**$-z$

(3)设 m,n 为正整数,则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

(A)仅与 m 取值有关 **(B)**仅与 n 取值有关

(C)与 m,n 取值都有关 **(D)**与 m,n 取值都无关

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A)$\int_0^1 dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$ **(B)**$\int_0^1 dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C)$\int_0^1 dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$ **(D)**$\int_0^1 dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

(5)设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 型矩阵，$\mathbf{B}$ 为 $n\times m$ 型矩阵,若 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$,则

(A)秩$(\mathbf{A})=m$,秩$(\mathbf{B})=m$

(B) 秩 $(\mathbf{A})=m$, 秩 $(\mathbf{B})=n$

(C)秩$(\mathbf{A})=n$,秩$(\mathbf{B})=m$

(D)秩$(\mathbf{A})=n$,秩$(\mathbf{B})=n$

(6)设 $\mathbf{A}$ 为 4 阶对称矩阵,且 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=0$, 若 $\mathbf{A}$ 的秩为 3,则 $\mathbf{A}$ 相似于

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(7)设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{2} & 0\le x\le 1\\ 1-\mathrm{e}^{-x} & x>2\end{cases}$, **则** $P\{X=1\}=$

(A)0

(B)1

(C) $\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$

(D) $1-\mathrm{e}^{-1}$

(8)设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度,

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x) & x\le 0\\ bf_2(x) & x>0\end{cases}\quad (a>0,b>0)$$

为概率密度,则 a,b 应满足

(A) $2a+3b=4$

(B) $3a+2b=4$

(C) $a+b=1$

(D) $a+b=2$

二、填空题(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)设 $x=\mathrm{e}^{-t},y=\int_0^t \ln(1+u^2)du$, **求** $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$ **=__________.**

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dy$ **=__________.**

(11)已知曲线 L **的方程为** $y=1-|x|\{x\in[-1,1]\}$, **起点是** $(-1,0)$, **终点是** $(1,0)$,

则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy$ **=__________.**

(12) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1\}$, **则** Ω **的形心的竖坐标** $\bar{z}$ **=__________.**

(13)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,\alpha)^T$, **若由** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ **形成的向量空间的维数是 2,则** α **=__________.**

(14) 设随机变量 X **概率分布为** $P\{X=k\}=\frac{C}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$, **则** EX^2 **=__________.**

三、解答题(15－23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ **的通解.**

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^x (x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(1)比较 $\int_0^1 \left|\ln t\right|[\ln(1+t)]^n\,dt$ 与 $\int_0^1 t^n\left|\ln t\right|dt(n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由

(1) 记 $u_n=\int_0^1 \left|\ln t\right|[\ln(1+t)]^n\,dt(n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 在点 P 的切平面与 xoy 面垂直,求 P 点的轨迹 C, 并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\left|y-2z\right|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1)求 λ,a.

(2)求方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $x=\mathbf{Q}y$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$, 且 $\mathbf{Q}$ 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(1)求 $\mathbf{A}$.

(2)证明 $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 为正定矩阵,其中 $\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X+Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty$, 求常数及 A 条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3

P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中$\theta\in(0,1)$未知,以N_i来表示来自总体X的简单随机样本(样本容量为n)中等于i的个数$(i=1,2,3)$,试求常数a_1,a_2,a_3,使$T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$为θ的无偏估计量,并求T的方差.