2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

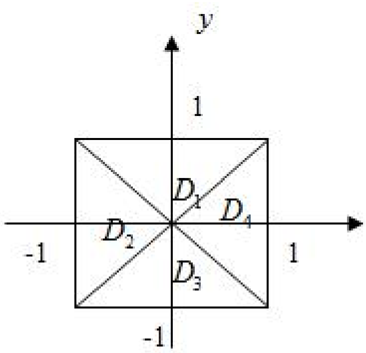
一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)当 $x\to 0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 等价无穷小,则

(A) $a=1,b=-\frac{1}{6}$　　**(B)** $a=1,b=\frac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$　　**(D)** $a=-1,b=\frac{1}{6}$

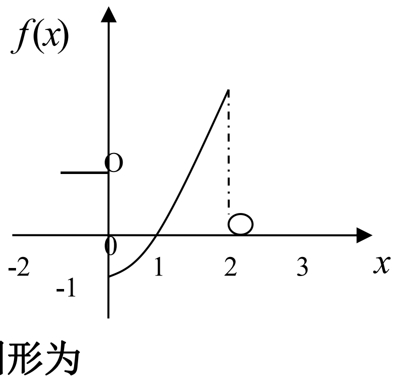
(2)如图,正方形 $\{(x,y)||x|\le 1,|y|\le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\,(k=1,2,3,4)$,$I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\,dxdy$,则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\}=$



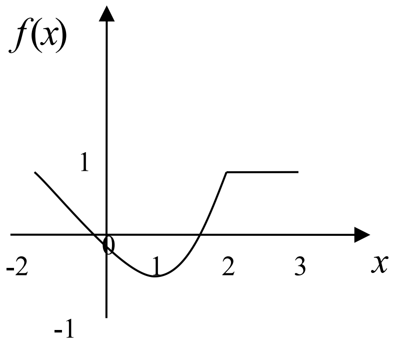
(A) I_1　　**(B)** I_2

(C) I_3　　**(D)** I_4

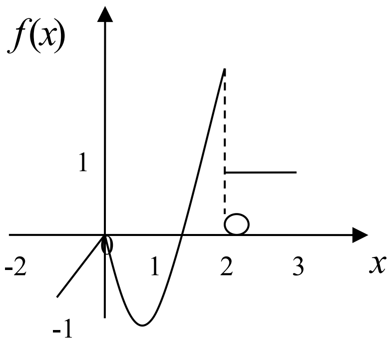
(3)设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为

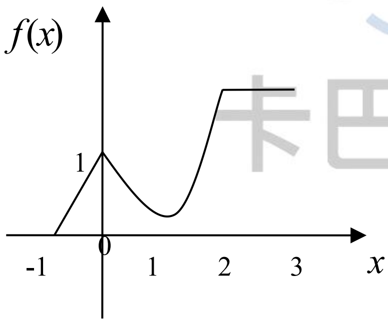


则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 的图形为

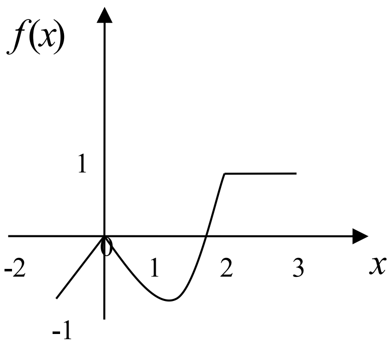


(A)　　　　　　　　　　　　　　**(B)**





(C)



(D)

(4)设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则

(A)当$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

(B)当$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散.

(C)当$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$收敛.

(D)当$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$发散时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$发散.

(5)设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是 3 维向量空间$\mathbf{R}^3$的一组基,则由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$的过渡矩阵为

(A)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　　**(B)**$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$　　**(D)**$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(6)设 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 均为 2 阶矩阵,$\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*$分别为 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 的伴随矩阵,若$|\mathbf{A}|=2,|\mathbf{B}|=3$,则分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的伴随矩阵为

(A)$\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　　**(B)**$\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　**(D)**$\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

(7)设随机变量X的分布函数为$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$,其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数,则$EX=$

(A)0　　**(B)0.3**

(C)0.7　　　　**(D)1**

(8)设随机变量X**与**Y**相互独立,且**X**服从标准正态分布**$N(0,1)$**,**Y**的概率分布为**$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$**,记**$F_Z(z)$**为随机变量**$Z=XY$**的分布函数,则函数**$F_Z(z)$**的间断点个数为**

(A)0　　　　**(B)1**

(C)2　　　　**(D)3**

二、填空题(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设函数 $f(u,v)$ **具有二阶连续偏导数,** $z=f(x,xy)$ **,则** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$**__________.**

(10)若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ **的通解为** $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$**,则非齐次方程**$y''+ay'+by=x$**满足条件**$y(0)=2,y'(0)=0$**的解为**$y=$**__________.**

(11)已知曲线$L:y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$**,则**$\int_L xds=$**____________.**

(12)设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$**,则**$\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=$**____________.**

(13)若 3 维列向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$**满足**$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2$**,其中**$\boldsymbol{\alpha}^T$**为**$\boldsymbol{\alpha}$**的转置,则矩阵**$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$**的非零特征值为____________.**

(14)设$X_1,X_2,\cdots,X_m$**为来自二项分布总体**$B(n,p)$**的简单随机样本,**$\overline{X}$**和**S^2**分别为样本均值和样本方差.若**$\overline{X}+kS^2$**为**np^2**的无偏估计量,则**$k=$**____________.**

三、解答题(15－23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}\left(n=1,2,.....\right)$ 所围成区域的面积,记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求 S_1 与 S_2 的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成,圆锥面 S_2 是过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(1)求 S_1 及 S_2 的方程.　(2)求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18)(本题满分 11 分)

(1)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$,其中 $\sum$ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$,$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

(1)求满足 $\mathbf{A}\xi_2=\xi_1$ 的 ξ_2 . $\mathbf{A}^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3 . (2)对(1)中的任意向量 ξ_2,ξ_3 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1)求二次型 f 的矩阵的所有特征值；　(2)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红色球,2 个黑色球与 3 个白球,现有回放地从袋中取两次,每次取一球,以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $p\left\{X=1|Z=0\right\}$.　(2)求二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 概率分布

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x}, x>0\\ 0,其他\end{cases}$,其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知,X_1,X_2,… X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1)求参数 λ 的矩估计量.

(2)求参数 λ 的最大似然估计量.

公众号：卡巴学长考研中心 Q 群：983277199 837961369 904525171 微信：KBXZ111 专注考研专业课一对一辅导 更多资料群内咨询