

2008 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t)dt$ 则 $f'(x)$ 的零点个数

(A)0 (B)1

(C)2 (D)3

(2) 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 $(0, 1)$ 处的梯度等于

(A) i (B) $-i$

(C) j (D) $-j$

(3) 在下列微分方程中,以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数)为通解的是

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛

(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

(5) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = 0$, 则

(A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆

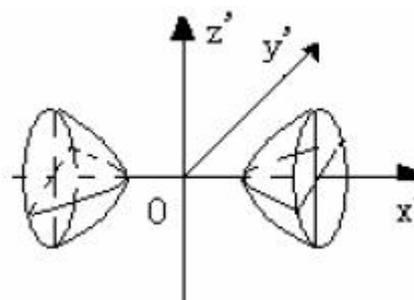
(B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆

(C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆

(D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆

(6) 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程

$(x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图, 则 A



的正特征值个数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(7) 设随机变量 X, Y 独立同分布且 X 分布函数为 $F(x)$, 则

$Z = \max\{X, Y\}$ 分布函数为

(A) $F^2(x)$

(B) $F(x)F(y)$

(C) $1 - [1 - F(x)]^2$

(D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$

(8) 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$ 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则

(A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$

(B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$

(C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$

(D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

二、填空题(9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸

指定位置上.)

(9) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ _____.

(10) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____.

(11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 _____.

(12) 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy =$ _____.

(13) 设 A 为 2 阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为 _____.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} =$ _____.

三、解答题(15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

(17)(本题满分 10 分)

已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$, 求曲线 C 距离 XOY 面最远的点和最近的点.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(1) 利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x) = 2\int_0^x f(t) dt - x\int_0^2 f(t) dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19)(本题满分 10 分)

$f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$, 用余弦级数展开, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20)(本题满分 11 分)

$A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, α^T 为 α 的转置, β^T 为 β 的转置. 证明:

(1) $r(A) \leq 2$. (2) 若 α, β 线性相关, 则 $r(A) < 2$.



(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}$, 现矩阵 A 满足方程 $AX = B$, 其中

$X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $B = (1, 0, \dots, 0)$,

(1) 求证 $|A| = (n+1)a^n$.

(2) a 为何值, 方程组有唯一解, 求 x_1 .

(3) a 为何值, 方程组有无穷多解, 求通解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为

$P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$, Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases} 1 & 0\leq y\leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 记 $Z=X+Y$,

(1) 求 $P\left\{Z\leq\frac{1}{2}\mid X=0\right\}$.

(2) 求 Z 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本.

记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2$, $T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(2) 当 $\mu=0, \sigma=1$ 时, 求 DT .