2007 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1)当 $x \to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

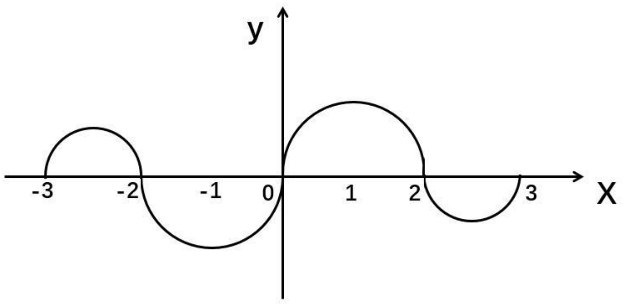
(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　**(B)** $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　**(D)** $1-\cos\sqrt{x}$

(2)曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$,渐近线的条数为

(A)0　　**(B)1**
(C)2　　**(D)3**

(3)如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 **1** 的上、下半圆周,在区间 $[-2,0],[0,2]$ 的图形分别是直径为 **2** 的上、下半圆周,设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.则下列结论正确的是



(A) $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　**(B)** $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

(C) $F(3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　**(D)** $F(3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

(4)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是

(A)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(B)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(C)若 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)=0$

(D)若 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)=0$

(5) 设函数 $f(x)$ 在 **(0, +∞)** 上具有二阶导数,且 $f''(x)>0$ ，令 $u_n=f(n)=1,2,\cdots,n,$ 则下列结论正确的是

(A)若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必收敛　　**(B)**若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必发散

(C)若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必收敛　　**(D)**若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必发散

(6)设曲线 $L:f(x,y)=1$ **(** $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数**)**,过第 **2** 象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N,Γ 为 L 上从点 M 到 N 的一段弧,则下列小于零的是

(A) $\int_\Gamma (x,y)dx$　　**(B)** $\int_\Gamma f(x,y)dy$

(C) $\int_\Gamma f(x,y)ds$　　**(D)** $\int_\Gamma f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

(7)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列向量组线形相关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　**(B)** $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　**(D)** $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

(8)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 **A** 与 **B**

(A)合同,且相似　　**(B)**合同,但不相似

(C)不合同,但相似　　**(D)**既不合同,也不相似

(9)某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第 **4** 次射击恰好第 **2** 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$　　**(B)** $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$　　**(D)** $6p^2(1-p)^2$

(10)设随即变量 (X,Y) 服从二维正态分布,且 X 与 Y 不相关, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度,则在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

(A) $f_X(x)$　　**(B)** $f_Y(y)$

(C) $f_X(x)\ f_Y(y)$　　　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

二、填空题(11－16 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上)

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx =$________.

(12)设 $f(u,v)$ **为二元可微函数,** $z = f(x^y, y^x)$ **,则** $\frac{\partial z}{\partial x} =$______.

(13) 二阶常系数非齐次线性方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ **的通解为** $y =$____________.

(14)设曲面 $\sum : |x| + |y| + |z| = 1$**,则** $\oiint\limits_{\Sigma} (x + |y|) ds =$_____________.

(15)设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**,则** $\mathbf{A}^3$ **的秩为**________.

(16)在区间 $(0,1)$ **中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于** $\frac{1}{2}$ **的概率为**________.

三、解答题(17－24 小题,共 86 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17)(本题满分 11 分)

求函数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ **在区域** $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}$ **上的最大值和最小值.**

(18)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy,$ **其中** Σ **为曲面** $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} (0 \le z \le 1)$ **的上侧.**

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛,其和函数 $y(x)$ 满足 $y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1$.

(1)证明: $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots$.

(2)求 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$,与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$,有公共解,求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 **A** 的特征向量值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2.\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$ 是 **A** 的

属于特征值 λ_1 的一个特征向量,记 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^5-4\mathbf{A}^3+\mathbf{E}$, 其中 $\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\mathbf{B}$ 的特征向量,并求 $\mathbf{B}$ 的全部特征值与特征向量.

(2)求矩阵 $\mathbf{B}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) **的概率密度为** $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y,0<x<1,0<y<1\\ 0,其他\end{cases}$

(1)求 $P\{X>2Y\}$. **(2)求** $Z=X+Y$ **的概率密度.**

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X **的概率密度为** $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta},0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)},\theta\le x<1\\ 0,其他\end{cases}$

$X_1,X_2\cdots,X_n$ **是来自总体** x **的简单随机样本,** $\overline{X}$ **是样本均值**

(1)求参数 θ **的矩估计量** $\hat{\theta}$.

(2)判断 $4\overline{X}^2$ **是否为** θ^2 **的无偏估计量,并说明理由.**