2005 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 ______________.

(2)微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为______________.

(3) 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$，单位向量 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,2,3)}$=.__________.

(4)设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=$______________.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,记矩阵

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

如果 $|\mathbf{A}|=1$,那么 $|\mathbf{B}|=$____.

(6)从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y，则 $P\{Y=2\}$=______________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$ **,则** $f(x)$ **在** $(-\infty,+\infty)$ **内**

(A)处处可导 **(B)恰有一个不可导点**

(C)恰有两个不可导点 **(D)至少有三个不可导点**

(8)设 $F(x)$ **是连续函数** $f(x)$ **的一个原函数,**"$M\Leftrightarrow N$"**表示**"M **的充分必要条件是** N", **则必有**

(A) $F(x)$ **是偶函数** $\Leftrightarrow f(x)$ **是奇函数** **(B)** $F(x)$ **是奇函数** $\Leftrightarrow f(x)$ **是偶函数**

(C) $F(x)$ **是周期函数** $\Leftrightarrow f(x)$ **是周期函数** **(D)** $F(x)$ **是单调函数** $\Leftrightarrow f(x)$ **是单调函数**

(9)设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$ **，其中函数** φ **具有二阶导数,** ψ **具有一阶导数,则必有**

(A) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$ **(B)** $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$

(C) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$ **(D)** $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$

(10)设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$ **,根据隐函数存在定理,存在点** $(0,1,1)$ **的一个邻域,在此邻域内该方程**

(A)只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ **和** $z=z(x,y)$

(C)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ **和** $z=z(x,y)$

(D)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ **和** $y=y(x,z)$

(11)设λ_1,λ_2是矩阵**A**的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,则$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1\neq 0$　　**(B)** $\lambda_2\neq 0$

(C) $\lambda_1=0$　　**(D)** $\lambda_2=0$

(12)设**A**为$n(n\geq 2)$阶可逆矩阵,交换**A**的第1行与第2行得矩阵**B**.$\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*$分别为**A**,**B**的伴随矩阵,则

(A)交换$\mathbf{A}^*$的第1列与第2列得$\mathbf{B}^*$　　**(B)**交换$\mathbf{A}^*$的第1行与第2行得$\mathbf{B}^*$

(C)交换$\mathbf{A}^*$的第1列与第2列得$-\mathbf{B}^*$　　**(D)**交换$\mathbf{A}^*$的第1行与第2行得$-\mathbf{B}^*$

(13)设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

Y \ X	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立,则

(A) $a=0.2,b=0.3$　　**(B)** $a=0.4,b=0.1$

(C) $a=0.3,b=0.2$　　**(D)** $a=0.1,b=0.4$

(14)设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geq 2)$为来自总体$N(0,1)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值,$S^2$为样本方差,则

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　**(B)** $nS^2\sim\chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$　　　　**(D)** $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$

三 、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 11 分)

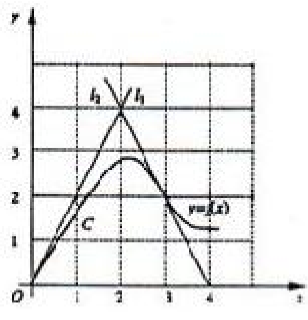
设 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$ ，$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy.$

(16)(本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\dfrac{1}{n(2n-1)})x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17)(本题满分 11 分)

如图,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点 $(3,2)$ 是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线,其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx.$



(18)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$．证明:

(1)存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$.

(2)存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分 $\oint_L \frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(1)证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C, 有 $\oint_C \frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$.

(2)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1)求a的值；

(2)求正交变换$x=\mathbf{Q}y$,把$f(x_1,x_2,x_3)$化成标准形.

(3)求方程$f(x_1,x_2,x_3)$=0 的解.

(21)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是$(a,b,c),a,b,c$不全为零,矩阵$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$为常数),且$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$,求线性方程组$\mathbf{A}x=0$的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,0<y<2x\\0 & 其它\end{cases}$

求:(1)(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$.

(2)$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

(23)(本题满分 9 分)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$为来自总体$N(0,1)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值,记$Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n.$

求:(1)Y_i的方差$DY_i,i=1,2,\cdots,n$.

(2)Y_1与Y_n的协方差$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$.