

2004 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1)曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为_____.

(2)已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$,且 $f(1) = 0$,则 $f(x) =$ _____.

(3)设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L xdy - 2ydx$ 的值为_____.

(4)欧拉方程 $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为_____.

(5)设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$,其中 A^* 为 A 的

伴随矩阵, E 是单位矩阵,则 $|B| =$ _____.

(6)设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7)把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α, β, γ

(B) α, γ, β

(C) β, α, γ

(D) β, γ, α

(8) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$

内单调减少

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$

(D) 对任意的

$x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于

(A) $2f(2)$

(B) $f(2)$

(C) $-f(2)$

(D) 0

(11) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(C) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(12) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 数 u_α

满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$

(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$

(D) $u_{1-\alpha}$

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$.

令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则

(A) $\text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$

(B) $\text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$

(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$

(D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700km/h 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

(注:kg 表示千克,km/h 表示千米/小时)

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

(18)(本题满分 11 分)

设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数. 证明此方程存在惟一正实根 x_n , 并证明当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

(19)(本题满分 12 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

(20)(本题满分 9 分)

其中未知参数 $\beta > 1$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本,

求:(1) β 的矩估计量. (2) β 的最大似然估计量

