2002 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$______________.

(2) 已知 $e^y+6xy+x^2-1=0$,则 $y''(0)=$______________.

(3) $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$ 的特解是______________.

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换可化为标准型 $f=6y_1^2$,则 $a=$______________.

(5) 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 0.5,则 $\mu=$______________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的四条性质:

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续,② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数连续,

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微,④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数存在.

则有:

(A)②⇒③⇒① (B)③⇒②⇒①

(C)③⇒④⇒① (D)③⇒①⇒④

(2)设$u_n \neq 0$,且$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,则级数$\sum(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$为

(A)发散 (B)绝对收敛

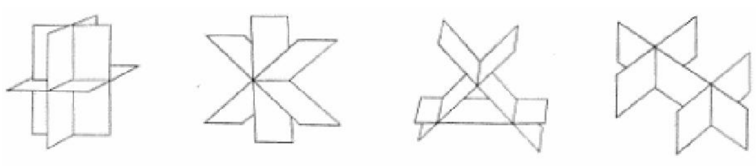
(C)条件收敛 (D)收敛性不能判定.

(3)设函数$f(x)$在R^+上有界且可导,则

(A)当$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$时,必有$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$ (B)当$\lim_{x\to+\infty}f'(x)$存在时,必有$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(C) 当$\lim_{x\to0+}f(x)=0$时,必有$\lim_{x\to0+}f'(x)=0$ (D) 当$\lim_{x\to0+}f'(x)$存在时,必有$\lim_{x\to0+}f'(x)=0$.

(4)设有三张不同平面,其方程为$a_ix+b_iy+c_iz=d_i$($i=1,2,3$)它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为2,则这三张平面可能的位置关系为



(A) (B) (C) (D)

(5)设X和Y是相互独立的连续型随机变量,它们的密度函数分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$,分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$,则

(A) $f_X(x)+f_Y(y)$必为密度函数 (B) $f_X(x)f_Y(y)$必为密度函数

(C) $F_X(x)+F_Y(y)$必为某一随机变量的分布函数 (D) $F_X(x)F_Y(y)$必为某一随机变量的分布函数.

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域具有一阶连续导数,且 $f(0)f'(0)\neq 0$,当 $h\to 0$ 时,若 $af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h)$,试求 a,b 的值.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同.求此切线的方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{2}{n})$.

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 R 上具有一阶连续导数,L 是上半平面(y>0)内的有向分段光滑曲线,起点为(a,b),终点为(c,d).

记 $I=\int\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$,

(1)证明曲线积分 I 与路径 L 无关.

(2)当 $ab=cd$ 时,求 I 的值.

七、(本题满分 7 分)

(1)验证函数 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$($-\infty<x<+\infty$)满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$.

(2)求幂级数 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 7 分)

设有一小山,取它的底面所在的平面为 xoy 面,其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\le 75\}$,小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1)设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点,问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上何方向的方向导数最大?若此方向的方向导数为 $g(x_0,y_0)$,写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2)现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚下寻找一山坡最大的点作为攀登的起点.也就是说要在 D 的边界线上找出使(1)中 $g(x,y)$ 达到最大值的点.试确定攀登起点的位置.

九、(本题满分 6 分)

已知四阶方阵 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为四维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\mathbf{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

十、(本题满分 8 分)

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为同阶方阵,

(1)若 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 相似,证明 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的特征多项式相等.

(2)举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.

(3)当 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为实对称矩阵时,证明(1)的逆命题成立.