# 2001 年全国硕士研究生入学统一考试

## 数学(一)试卷

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)**

(1)设 $y=e^x(a\sin x+b\cos x)(a,b$ 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解,则该方程为_____________.

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ,则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)\big|_{(1,-2,2)}=$ _____________.

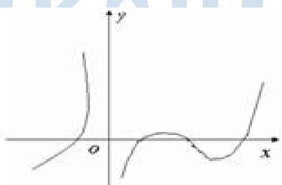
(3)交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=$_____________.

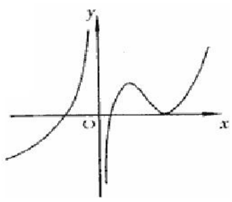
(4)设 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-4\mathbf{E}=\mathbf{O}$ ,则 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=$ _____________.

(5) $D(X)=2$ ,则根据车贝晓夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\geq 2\}\leq$ _____________.

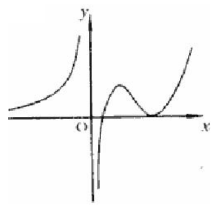
**二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)**

(1)设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y=f(x)$ 的图形如右图所示,则 $y=f'(x)$ 的图形为

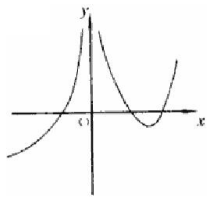




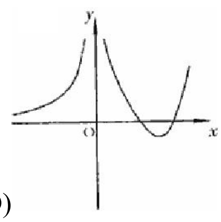
(A)



(B)



(C)



(D)

(2)设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的附近有定义,且 $f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=1$ 则

(A) $dz|_{(0,0)}=3dx+dy$

(B)曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为 $\{3,1,1\}$

(C)曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$\{1,0,3\}$

(D)曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$\{3,0,1\}$

(3)设$f(0)=0$则$f(x)$在$x$=0处可导$\Leftrightarrow$

(A)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$存在　　(B)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$存在

(C)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$存在　　(D)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$存在

(4)设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$

(A)合同且相似　(B)合同但不相似　(C)不合同但相似　(D)不合同且不相似

(5)将一枚硬币重复掷$n$次,以$X$和$Y$分别表示正面向上和反面向上的次数, 则$X$和$Y$相关系数为

(A) -1　(B)0　(C)$\dfrac{1}{2}$　(D)1

**三、(本题满分 6 分)**

求$\int\dfrac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

**四、(本题满分 6 分)**

设函数$z=f(x,y)$在点$(1,1)$可微,且

$f(1,1)=1, f_x'(1,1)=2, f_y'(1,1)=3$, $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$,求$\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$.

**五、(本题满分 8 分)**

设$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x^2}{x}\arctan x & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$,将$f(x)$展开成$x$的幂级数,并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$的和.

**六、(本题满分 7 分)**

计算$I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$,其中$L$是平面 $x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线,从$Z$轴正向看去,$L$为逆时针方向.

**七、(本题满分 7 分)**

设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$.证明:

(1)对于 $\forall x\in(-1,0)\cup(0,1)$,存在惟一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=0.5$.

**八、(本题满分 8 分)**

设有一高度为 $h(t)$($t$ 为时间)的雪堆在融化过程,其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为厘米,时间单位为小时),已知体积减少的速率与侧面积成正比(系数为 0.9),问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少时间?

**九、(本题满分 6 分)**

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{O}$ 的一个基础解系,

$$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1,$$

其中 $t_1,t_2$ 为实常数,试问 $t_1,t_2$ 满足什么条件时 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\mathbf{AX}=\mathbf{O}$ 的一个基础解系?

**十、(本题满分 8 分)**

已知三阶矩阵 $\mathbf{A}$ 和三维向量 $\boldsymbol{x}$,使得 $\boldsymbol{x},\mathbf{A}\boldsymbol{x},\mathbf{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关,且满足 $\mathbf{A}^3\boldsymbol{x}=3\mathbf{A}\boldsymbol{x}-2\mathbf{A}^2\boldsymbol{x}$.

(1)记 $\mathbf{P}=(\boldsymbol{x},\mathbf{A}\boldsymbol{x},\mathbf{A}^2\boldsymbol{x})$, 求 $\mathbf{B}$ 使 $\mathbf{A}=\mathbf{PBP}^{-1}$.

(2)计算行列式 $|\mathbf{A}+\mathbf{E}|$.

**十一、(本题满分 7 分)**

某班车起点站上客人数 $X$ 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布,每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$, 且中途下车与否相互独立. $Y$ 为中途下车的人数,求:

(1)在发车时有 $n$ 个乘客的条件下,中途有 $m$ 人下车的概率.

(2)二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布.

**十二、(本题满分 7 分)**

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\ldots,X_{2n}(n\geq 2)$,

样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$ , $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ ,求 $E(Y)$.

卡巴学长