

2000 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx =$ _____.

(2) 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, -2, -2)$ 的法线方程为 _____.

(3) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为 _____.

(4) 已知方程组
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 无解, 则 $a =$ _____.

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$ (B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$ (D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

(2) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分, 则有

(A) $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS$ (B) $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} x dS$

(C) $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} x dS$ (D) $\iint_S xyz dS = 4 \iint_{S_1} xyz dS$

(3) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

(4) 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m (m < n)$ 线性无关, 则 n 维列向量组 β_1, \dots, β_m 线性无关的充分必要条件为

(A) 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 β_1, \dots, β_m 线性表示

(B) 向量组 β_1, \dots, β_m 可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 与向量组 β_1, \dots, β_m 等价

(D) 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ 等价

(5) 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为

(A) $E(X) = E(Y)$

(B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$

(D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$

三、(本题满分 6 分)

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

四、(本题满分 5 分)

设 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

五、(本题满分 6 分)

计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以点 $(1, 0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R > 1$),

取逆时针方向.

六、(本题满分 7 分)

设对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S , 都有

$\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdx dy = 0$, 其中函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有连续的一阶

导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 求 $f(x)$.

七、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间, 并讨论该区间端点处的收敛性.

八、(本题满分 7 分)

设有一半径为 R 的球体, P_0 是此球的表面上的一个定点, 球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k > 0$), 求球体的重心位置.

九、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0, \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$. 试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

十、(本题满分 6 分)

设矩阵 \mathbf{A} 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} + 3\mathbf{E}$, 其中 \mathbf{E} 为 4 阶单

位矩阵, 求矩阵 \mathbf{B} .

十一、(本题满分 8 分)

某适应性生产线每年 1 月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年 1 月份统计的熟练工与非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n , 记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 \mathbf{A} 的两个线性无关的特征向量, 并求出相应的特征值.

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时, 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

十二、(本题满分 8 分)

某流水线上每个产品不合格的概率为 $p(0 < p < 1)$, 各产品合格与否相对独立, 当出现 1

个不合格产品时即停机检修.设开机后第 1 次停机时已生产了的产品个数为 X ,求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

十三、(本题满分 6 分)

设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & x \leq \theta \end{cases}$, 其中 $\theta > 0$ 为未知

参数.又设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 X 的一组样本观测值,求参数 θ 的最大似然估计值.

