1999 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})=$____________.

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt=$____________.

(3) $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为 $y=$____________.

(4)设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素全为 1,则 $\mathbf{A}$ 的 n 个特征值是 ____________.

(5) 设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件: $ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$,

且已知 $P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$, 则 $P(A)=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

(A)当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数 (B)当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数

(C)当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数 (D)当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数

(2)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2 g(x) & x\le 0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A)极限不存在 (B)极限存在,但不连续

(C)连续,但不可导 (D)可导

(3)设 $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-2x & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$, $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty,$

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$,则 $S(-\dfrac{5}{2})$ 等于

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $-\frac{3}{4}$

(4)设$\mathbf{A}$是$m\times n$矩阵,$\mathbf{B}$是$n\times m$矩阵,则

(A)当$m>n$时,必有行列式$|\mathbf{AB}|\neq 0$　　(B)当$m>n$时,必有行列式$|\mathbf{AB}|=0$

(C)当$n>m$时,必有行列式$|\mathbf{AB}|\neq 0$　　(D)当$n>m$时,必有行列式$|\mathbf{AB}|=0$

(5)设两个相互独立的随机变量X和Y分别服从正态分布$N(0,1)$和$N(1,1)$,则

(A) $P\{X+Y\leq 0\}=\frac{1}{2}$　　(B) $P\{X+Y\leq 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\leq 0\}=\frac{1}{2}$　　(D) $P\{X-Y\leq 1\}=\frac{1}{2}$

三、(本题满分 6 分)

设$y=y(x),z=z(x)$是由方程$z=xf(x+y)$和$F(x,y,z)=0$所确定的函数,其中f和F分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求$\frac{dz}{dx}$.

四、(本题满分 5 分)

求$I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))dx+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)dy$,其中$a,b$为正的常数,$L$为从点$A(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$到点$O(0,0)$的弧.

五、(本题满分 6 分)

设函数$y(x)(x\geq 0)$二阶可导且$y'(x)>0,y(0)=1$.过曲线$y=y(x)$上任意一点$P(x,y)$作该曲线的切线及x轴的垂线,上述两直线与x轴所围成的三角形的面积记为S_1,区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲线的曲边梯形面积记为S_2,并设$2S_1-S_2$恒为1,求曲线$y=y(x)$的方程.

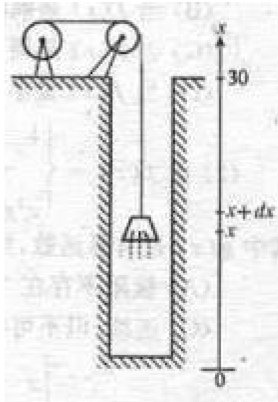
六、(本题满分 7 分)

论证:当$x>0$时,$(x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2$.

七、(本题满分 6 分)

为清除井底的淤泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口(见图).已知井深 30m,抓斗自重 400N,缆绳每米重 50N,抓斗抓起的污泥重 2000N,提升速度为 3m/s,在提升过程中,污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉.现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需作多少焦耳的功?

(说明:①$1N\times 1m=1Jm$,N,s,J 分别表示米,牛,秒,焦.②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



八、(本题满分 7 分)

设 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in S,\pi$ 为 S 在点 P 处的切平面,$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离,求 $\displaystyle\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS.$

九、(本题满分 7 分)

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$:

(1)求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值.

(2)试证:对任意的常数 $\lambda>0$, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

十、(本题满分 8 分)

设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$，其行列式 $|\mathbf{A}|=-1$，又 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^T$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

十一、(本题满分 6 分)

设 $\mathbf{A}$ 为 m 阶实对称矩阵且正定，$\mathbf{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\mathbf{B}^T$ 为 $\mathbf{B}$ 的转置矩阵，试证 $\mathbf{B}^T\mathbf{AB}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\mathbf{B}$ 的秩 $r(\mathbf{B})=n$.

十二、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X,Y) 联合分布率及关于 X 和关于 Y 的边缘分布率中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)=p_{i\bullet}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P(Y=y_i)=p_{\bullet j}$	$\frac{1}{6}$			1

十三、(本题满分 6 分)

设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x) & 0<x<\theta \\ 0 & 其它 \end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本

(1)求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.

(2)求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.