1998 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$____________.

(2)设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y), f,\varphi$ 具有二阶连续导数,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

(3)设 l 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 其周长记为 a, 则 $\oint\limits_{L}(2xy+3x^2+4y^2)ds=$____________.

(4)设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵, $|\mathbf{A}|\neq 0, \mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, $\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵.若 $\mathbf{A}$ 有特征值 λ, 则 $(\mathbf{A}^*)^2+\mathbf{E}$ 必有特征值____________.

(5)设平面区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0, x=1, x=\mathrm{e}^2$ 所围成,二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布,则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$

(A) $xf(x^2)$ (B) $-xf(x^2)$

(C) $2xf(x^2)$ (D) $-2xf(x^2)$

(2)函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是

(A)3 (B)2

(C)1 (D)0

(3)已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 且当 $\Delta x\to 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0)=\pi$,则 $y(1)$ 等于

(A) 2π (B) π

(C) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$ (D) $\pi\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$

(4) 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$

(A)相交于一点　　(B)重合

(C)平行但不重合　　(D)异面

(5)设 A,B 是两个随机事件,且 $0<P(A)<1,P(B)>0,P(B|A)=P(B|\overline{A})$, 则必有

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　(B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

三、(本题满分 5 分)

求直线 $l:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程,并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

四、(本题满分 6 分)

确定常数 λ, 使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\mathbf{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度,并求 $u(x,y)$.

五、(本题满分 6 分)

从船上向海中沉放某种探测仪器,按探测要求,需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系.设仪器在重力作用下,从海平面由静止开始铅直下沉,在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用.设仪器的质量为 m, 体积为 B, 海水密度为 ρ, 仪器所受的阻力与下沉速度成正比,比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程,并求出函数关系式 $y=y(v)$.

六、(本题满分 7 分)

计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$, 其中 Σ 为下半平面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, a 为大于零的常数.

七、(本题满分 6 分)

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

八、（本题满分 5 分）

设正向数列$\{a_n\}$单调减少,且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散,试问级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$是否收敛?并说明理由.

九、（本题满分 6 分）

设$y=f(x)$是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数.

(1)试证存在$x_0\in(0,1)$,使得在区间$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积,等于在区间$[x_0,1]$上以$y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积.

(2)又设$f(x)$在区间$(0,1)$内可导,且$f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$,证明(1)中的x_0是唯一的.

十、（本题满分 6 分）

已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$可以经过正交变换

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{bmatrix}$化为椭圆柱面方程$\eta^2+4\xi^2=4$,求$a,b$的值和正交矩阵$\mathbf{P}$.

十一、（本题满分 4 分）

设$\mathbf{A}$是n阶矩阵,若存在正整数k,使线性方程组$\mathbf{A}^k x=\mathbf{0}$有解向量$\boldsymbol{\alpha}$,且$\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

证明:向量组$\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$是线性无关的.

十二、（本题满分 5 分）

已知方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0\end{cases}$$

的一个基础解析为$(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^T,(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^T,\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^T$.试写出线性方程组

$$(\mathrm{II})\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0\\b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0\\\qquad\vdots\\b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0\end{cases}$$

的通解,并说明理由.

十三、（本题满分 6 分）

设两个随机变量 X,Y 相互独立,且都服从均值为0、方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布,求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

十四、（本题满分 4 分）

从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本,如果要求其样本均值位于区间 $(1.4,5.4)$ 内的概率不小于0.95,问样本容量 n 至少应取多大?

附:标准正态分布表 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(x)$	0.900	0.950	0.975	0.990

十五、（本题满分 4 分）

设某次考试的学生成绩服从正态分布,从中随机地抽取36位考生地成绩,算得平均成绩为66.5分,标准差为15分.问在显著性水平0.05下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70 分?并给出检验过程.

附: t 分布表 $P\{t(n)\le t_p(n)\}=p$

	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281