1997 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$____________.

(2) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为____________.

(3)对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为____________.

(4)设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$,$\mathbf{B}$ 为三阶非零矩阵,且 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, 则 $t=$____________.

(5)袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个是黄球,30 个是白球,今有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第二个人取得黄球的概率是____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,在点 $(0,0)$ 处

(A)连续,偏导数存在　　(B)连续,偏导数不存在

(C)不连续,偏导数存在　　(D)连续,偏导数不存在

(2)设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0.$ 令

$$S_1=\int_a^b f(x)dx,S_2=f(b)(b-a),S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),$$

则

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$

(3)设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t dt$, 则 $F(x)$

(A)为正常数　　(B)为负常数

(C)恒为零　　(D)不为常数

(4)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$, 则三条直线 $\begin{matrix}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0,\\a_3x+b_3y+c_3=0\end{matrix}$

(其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3$)交于一点的充要条件是:

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

(C)秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关 ,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关

(5)设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为4和2,则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是

(A)8

(B)16

(C)28

(D)44

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

(2)计算曲线积分 $\oint\limits_{c}(z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$, 其中 c 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases}$ 从 z 轴正向往 z 轴负向看 c 的方向是顺时针的.

(3)在某一人群中推广新技术是通过其中掌握新技术的人进行的,设该人群的总人数为 N, 在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0, 在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$(将 $x(t)$ 视为连续可微变量),其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比,比例常数 $k>0$, 求 $x(t)$.

四、(本题共 2 小题,第(1)小题 6 分,第(2)小题 7 分,满分 13 分)

(1)设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上,而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$, 求 a,b 之值.

(2)设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,而 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$, 求 $f(u)$.

五、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

六、(本题满分 8 分)

设 $a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})(n=1,2,\cdots)$，证明

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n$ 存在.　　(2)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛.

七、(本题共 2 小题,第(1)小题 5 分,第(2)小题 6 分,满分 11 分)

(1)设 $\mathbf{B}$ 是秩为2的 5×4 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,2,3]^T, \boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,4,-1]^T, \boldsymbol{\alpha}_3=[5,-1,-8,9]^T$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{B}x=\mathbf{0}$ 的解向量,求 $\mathbf{B}x=\mathbf{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

(2)已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

1)试确定 a,b 参数及特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值.

2)问 $\mathbf{A}$ 能否相似于对角阵?说明理由.

八、（本题满分 5 分）

设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶可逆方阵,将 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\mathbf{B}$.

(1)证明 $\mathbf{B}$ 可逆.

(2)求 $\mathbf{AB}^{-1}$.

九、（本题满分 7 分）

从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗,假设再各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的,并且概率都是 $\dfrac{2}{5}$. 设 X 为途中遇到红灯的次数,求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

十、（本题满分 5 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本,分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量.