1996 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1)设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=8$,则 $a=$____________.

(2)设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$,且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直,则此平面方程为____________.

(3)微分方程 $y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x$ 的通解为____________.

(4)函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为____________.

(5)设 $\mathbf{A}$ 是 4×3 矩阵,且 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=2$,而 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$,则 $r(\mathbf{AB})=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分,a 则等于

(A)-1　　(B)0

(C)1　　(D)2

(2)设 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$,则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(3)设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,常数 $\lambda\in(0,\frac{\pi}{2})$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$

(A)绝对收敛　　(B)条件收敛

(C)发散 (D)散敛性与 λ 有关

(4)设有 $f(x)$ 连续的导数，$f(0)=0, f'(0)\neq 0, F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 k 等于

(A)1 (B)2

(C)3 (D)4

(5)四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$ (B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$ (D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

三、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1)求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长,其中 $a>0$ 是常数.

(2)设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在,并求此极限.

四、(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)

(1)计算曲面积分 $\iint\limits_S (2x+z)dydz+zdxdy$，其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\le x\le 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

(2)设变换 $\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a.

五、(本题满分 7 分)

求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

设对任意 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，求 $f(x)$ 的一般表达式.

七、（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$，其中 a,b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点.证明 $|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

八、（本题满分 6 分）

设 $A=\mathbf{I}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T$，其中 $\mathbf{I}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量，$\boldsymbol{\xi}^T$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置.证明

(1) $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ 的充分条件是 $\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi}=1$.

(2)当 $\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi}=1$ 时，$\mathbf{A}$ 是不可逆矩阵.

九、（本题满分 8 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2,

(1)求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值.

(2)指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%,现从由 A 和 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该次品属 A 生产的概率是____________.

(2)设 ξ,η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$ 的随机变量,则随机变量 $|\xi-\eta|$ 的数学期望 $E(|\xi-\eta|)=$____________.

十一、（本题满分 6 分）

设 ξ,η 是两个相互独立且服从同一分布的两个随机变量,已知 ξ 的分布率为 $P(\xi=i)=\frac{1}{3},i=1,2,3.$

又设 $X=\max(\xi,\eta),Y=\min(\xi,\eta)$.

(1)写出二维随机变量的分布率:

X \ Y	1	2	3
1			
2			
3			

(2)求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.