1995 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$____________.

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}x\cos t^2dt=$____________.

(3)设 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}=2$, 则 $[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\bullet(\mathbf{c}+\mathbf{a})=$____________.

(4)幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$____________.

(5) 设三阶方阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 满足关系式 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}=6\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{A}$, 且 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{B}=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$,及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$, 则直线 L

(A)平行于 π　　(B)在 π 上

(C)垂直于 π　　(D)与 π 斜交

(2)设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(3)设 $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

(A)充分必要条件　　(B)充分条件但非必要条件

(C)必要条件但非充分条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

(4)设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$, 则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散

(5) 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
则必有

(A) $\mathbf{AP}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{B}$　　(B) $\mathbf{AP}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{B}$

(C) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{A}=\mathbf{B}$　　(D) $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\mathbf{B}$

三、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1) 设 $u=f(x,y,z), \varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0, y=\sin x$, 其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数,且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$. 求 $\frac{du}{dx}$.

(2)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,并设 $\int_0^1 f(x)dx=A$, 求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

四、(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)

(1)计算曲面积分 $\iint_\Sigma zdS$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leq 2x$ 内的部分.

(2)将函数 $f(x)=x-1(0\leq x\leq 2)$ 展开成周期为 4 的余弦函数.

五、(本题满分 7 分)

设曲线 L 位于平面 xOy 的第一象限内, L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交,交点记为 A. 已知 $\left|\overline{MA}\right|=\left|\overline{OA}\right|$, 且 L 过点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$, 求 L 的方程.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $Q(x,y)$ 在平面 xOy 上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关,并且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Q(x,y)dy$, 求 $Q(x,y)$.

七、(本题满分 8 分)

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数,并且 $g''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$, 试证:

(1)在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.

(2)在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

八、（本题满分 7 分）

设三阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$,对应于$\lambda_1$的特征向量为$\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$,求$\mathbf{A}$.

九、（本题满分 6 分）

设$\mathbf{A}$为n阶矩阵,满足$\mathbf{AA'}=\mathbf{I}$($\mathbf{I}$是n阶单位矩阵,$\mathbf{A'}$是$\mathbf{A}$的转置矩阵),$|\mathbf{A}|<0$,求$|\mathbf{A}+\mathbf{I}|$.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设X表示 10 次独立重复射击命中目标的次数,每次射中目标的概率为 0.4,则X^2的数学期望$E(X^2)=$____________.

(2)设X和Y为两个随机变量,且

$$P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\frac{3}{7},P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=\frac{4}{7},$$

则$P\{\max(X,Y)\geq 0\}=$____________.

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases},$$

求随机变量$Y=\mathrm{e}^X$的概率密度$f_Y(y)$.