1994 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cot \pi(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=$____________.

(2)曲面 $z-e^x+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为____________.

(3)设 $u=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$, 则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\dfrac{1}{\pi})$ 处的值为____________.

(4)设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$, 则 $\iint\limits_D(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})dxdy=$____________.

(5) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3],\boldsymbol{\beta}=[1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}]$, 设 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}'$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，则 $\mathbf{A}^n=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx,N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx,P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$, 则有

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

(2)二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的

(A)充分条件而非必要条件　　(B)必要条件而非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

(3)设常数 $\lambda>0$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A)发散　　(B)条件收敛

(C)绝对收敛　　(D)收敛性与 λ 有关

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$, 其中 $a^2+c^2\ne 0$, 则必有

(A) $b=4d$　　(B) $b=-4d$

(C) $a=4c$　　(D) $a=-4c$

(5)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则向量组

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)设 $\begin{cases} x=\cos(t^2) \\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,du \end{cases}$,求 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的值.

(2)将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

(3)求 $\int\frac{dx}{\sin(2x)+2\sin x}$.

四、(本题满分 6 分)

计算曲面积分 $\iint\limits_S\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $z=R,z=-R(R>0)$ 两平面所围成立体表面的外侧.

五、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 具有二阶连续函数, $f(0)=0,f'(0)=1,$ 且 $[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$ 为一全微分方程,求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

六、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0,$ 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

七、（本题满分 6 分）

已知点 A 与 B 的直角坐标分别为 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,1)$. 线段 AB 绕 x 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S. 求由 S 及两平面 $z=0,z=1$ 所围成的立体体积.

八、（本题满分 8 分）

设四元线性齐次方程组(I)为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$,

又已知某线性齐次方程组(II)的通解为 $k_1(0,1,1,0) + k_2(-1,2,2,1)$.

(1)求线性方程组(I)的基础解析.

(2)问线性方程组(I)和(II)是否有非零公共解?若有,则求出所有的非零公共解.若没有,则说明理由.

九、(本题满分 6 分)

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶非零方阵, $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, $\mathbf{A}'$ 是 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵,当 $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}'$ 时,证明 $|\mathbf{A}| \neq 0$.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1) 已知 A 、 B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\overline{AB})$, 且 $P(A) = p$, 则 $P(B)$=____________.

(2)设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布率,且 X 的分布率为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布率为____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$, 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{xy} = -\frac{1}{2}$, 设 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$,

(1)求 Z 的数学期望 EZ 和 DZ 方差.

(2)求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{xz}.

(3)问 X 与 Y 是否相互独立?为什么?