1993 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1)函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$ 的单调减少区间为____________.

(2)由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为____________.

(3) 设 函 数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的 傅 里 叶 级 数 展 开 式 为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则其中系数 b_3 的值为____________.

(4)设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=$____________.

(5)设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的各行元素之和均为零,且 $\mathbf{A}$ 的秩为 $n-1$, 则线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的通解为____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt, g(x)=x^3+x^4$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A)等价无穷小　　(B)同价但非等价的无穷小

(C)高阶无穷小　　(D)低价无穷小

(2)双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta$　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta$

(3)设有直线 $l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $l_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$ 则 l_1 与 l_2 的夹角为

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

(4)设曲线积分 $\int_L [f(t)-\mathrm{e}^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy$ 与路径无关,其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 等于

(A) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2}$　　(B) $\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

(C) $\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1$　　(D) $1-\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

(5)已知 $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$,$\mathbf{P}$ 为三阶非零矩阵,且满足 $\mathbf{PQ}=0$, 则

(A) $t=6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为 1　　(B) $t=6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为 2

(C) $t\neq 6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为 1　　(D) $t\neq 6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为 2

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$.

(2)求 $\int \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}dx$.

(3)求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$,满足初始条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解.

四、(本题满分 6 分)

计算 $\oiint\limits_{\Sigma} 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$, 其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

五、(本题满分 7 分)

求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

六、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1)设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数,且 $f'(x)\geq k>0, f(0)<0$, 证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

(2)设 $b>a>e$, 证明 $a^b>b^a$.

七、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$ 通过正交变换化成标准形

$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$,求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

八、(本题满分 6 分)

设 $\mathbf{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵,$\mathbf{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵,其中 $n<m$,$\mathbf{I}$ 是 n 阶单位矩阵,若 $\mathbf{AB}=\mathbf{I}$,证明 $\mathbf{B}$ 的列向量组线性无关.

九、(本题满分 6 分)

设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发,以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动.物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发,其速度大小为 $2v$,方向始终指向 A,试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程,并写出初始条件.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)一批产品共有 10 个正品和 2 个次品,任意抽取两次,每次抽一个,抽出后不再放回,则第二次抽出的是次品的概率为____________.

(2)设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布,则随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y)=$____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$.

(1)求 X 的数学期望 EX 和方差 DX.

(2)求 X 与 $|X|$ 的协方差,并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(3)问 X 与 $|X|$ 是否相互独立?为什么?