1992 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定,则 $\dfrac{dy}{dx}=$____________.

(2)函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}\,u\big|_M=$____________.

(3)设 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$,则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于____________.

(4)微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=$____________.

(5)设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$, 其中 $a_i\ne 0,b_i\ne 0,(i=1,2,\cdots,n)$. 则矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)当 $x\to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A)等于 2　　(B)等于 0

(C)为 ∞　　(D)不存在但不为 ∞

(2)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\dfrac{a}{n})$(常数 $a>0$)

(A)发散　　(B)条件收敛

(C)绝对收敛　　(D)收敛性与 a 有关

(3)在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线

(A)只有 1 条　　(B)只有 2 条

(C)至少有 3 条　　(D)不存在

(4)设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为

(A)0　　(B)1

(C)2　　(D)3

(5)要使$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$都是线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的解,只要系数矩阵$\mathbf{A}$为

(A)$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}$　　(B)$\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$　　(D)$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\4 & -2 & -2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(2)设$z=f(\mathrm{e}^x\sin y,x^2+y^2)$,其中$f$具有二阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3)设$f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\le 0\\ \mathrm{e}^{-x} & x>0\end{cases}$,求$\int_1^3 f(x-2)dx$.

四、(本题满分 6 分)

求微分方程$y''+2y'-3y=\mathrm{e}^{-3x}$的通解.

五、(本题满分 8 分)

计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$,其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧.

六、(本题满分 7 分)

设$f''(x)<0,f(0)=0$,证明对任何$x_1>0,x_2>0$,有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

七、(本题满分 8 分)

在变力$\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$的作用下,质点由原点沿直线运动到椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上第一卦限的点$M(\xi,\eta,\zeta)$,问当$\xi$、$\eta$、$\zeta$取何值时,力$\vec{F}$所做的功$W$最大?并求出$W$的最大值.

八、(本题满分 7 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,问:

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出?证明你的结论.

(2)(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?证明你的结论.

九、（本题满分 7 分）

设 3 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3,$ 对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},\text{又向量}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

(1)将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性表出.

(2)求 $\mathbf{A}^n\boldsymbol{\beta}$($n$ 为自然数).

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$,则事件 A 、B 、C 全不发生的概率为____________.

(2)设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布,则数学期望 $E\{X+\mathrm{e}^{-2X}\}=$____________.

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量 X 与 Y 独立,X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布,试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度(计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示,其中 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$).