1991 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1)设 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$____________.

(2)由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz=$____________.

(3)已知两条直线的方程是 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1};l_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. 则过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程是____________.

(4)已知当 $x\to 0$ 时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小,则常数 $a=$____________.

(5)设 4 阶方阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{A}$ 的逆阵 $\mathbf{A}^{-1}=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

(A)没有渐近线 (B)仅有水平渐近线

(C)仅有铅直渐近线 (D)既有水平渐近线又有铅直渐近线

(2)若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2\pi} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$, 则 $f(x)$ 等于

(A) $e^x\ln 2$ (B) $e^{2x}\ln 2$

(C) $e^x+\ln 2$ (D) $e^{2x}+\ln 2$

(3)已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于

(A)3 (B)7

(C)8 (D)9

(4)设 D 是平面 xoy 上以 $(1,1)$ 、$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一

象限的部分,则

$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy$ 等于

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xydxdy$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　(D)0

(5)设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 、$\mathbf{B}$ 、$\mathbf{C}$ 满足关系式 $\mathbf{ABC}=\mathbf{E}$, 其中 $\mathbf{E}$ 是 n 阶单位阵,则必有

(A) $\mathbf{ACB}=\mathbf{E}$　　(B) $\mathbf{CBA}=\mathbf{E}$

(C) $\mathbf{BAC}=\mathbf{E}$　　(D) $\mathbf{BCA}=\mathbf{E}$

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{2}}$.

(2)设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量,求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围城的立体.

四、(本题满分 6 分)

过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中,求一条曲线 L, 使沿该曲线 O 从到 A 的积分

$\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的值最小.

五、(本题满分 8 分)

将函数 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数,并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 内可导,且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0)$, 证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c, 使 $f'(c)=0$.

七、(本题满分 8 分)

已　知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$ 及 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1) a 、b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合?

(2) a 、b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的唯一的线性表示式?写出该表示式.

八、（本题满分 6 分）

设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶正定阵，$\mathbf{E}$ 是 n 阶单位阵,证明 $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 的行列式大于 1.

九、（本题满分 8 分）

在上半平面求一条向上凹的曲线,其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点),且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)若随机变量 X 服从均值为 2、方差为 σ^2 的正态分布,且 $P\{2<X<4\}=0.3$, 则 $P\{X<0\}=$____________.

(2)随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a 为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比,则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为____________.

十一、（本题满分 6 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\,\mathrm{e}^{-(x+2y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.