1990 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1)过点 $M(1,2-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是____________.

(2)设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x=$____________.

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases} 1 & |x|\le 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$,则 $f[f(x)]=$____________.

(4)积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}dy$ 的值等于____________.

(5)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,

则该向量组的秩是____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)dt$,则 $F'(x)$ 等于

(A) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　(B) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

(C) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　(D) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

(2)已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n![f(x)]^{2n}$

(3)设 a 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{\sin(na)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}]$

(A)绝对收敛　　(B)条件收敛

(C)发散　　(D)收敛性与 a 的取值有关

(4)已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

(A)不可导　　(B)可导,且 $f'(0)\neq 0$

(C)取得极大值　　(D)取得极小值

(5)已知 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应其次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解析,k_1、k_2 为任意常数,则方程组 $\mathbf{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解(一般解)必是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求 $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx.$

(2)设 $z=f(2x-y,y\sin x)$, 其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3)求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$ 的通解(一般解).

四、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

五、(本题满分 8 分)

求曲面积分 $I=\iint\limits_S yzdzdx+2dxdy$ 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\geq 0$ 的部分.

六、（本题满分 7 分）

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)$.证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)>0$.

七、（本题满分 6 分）

设四阶矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

且矩阵 $\mathbf{A}$ 满足关系式

$$\mathbf{A}(\mathbf{E}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})'\mathbf{C}'=\mathbf{E}$$

其中 $\mathbf{E}$ 为四阶单位矩阵,$\mathbf{C}^{-1}$ 表示 $\mathbf{C}$ 的逆矩阵,$\mathbf{C}'$ 表示 $\mathbf{C}$ 的转置矩阵.将上述关系式化简并

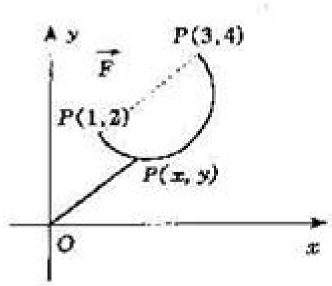
求矩阵 **A**.

八、（本题满分 8 分）

求一个正交变换化二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 成标准型.

九、（本题满分 8 分）

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\vec{F}$ 作用(见图). $\vec{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$.求变力 $\vec{F}$ 对质点 P 所作的功.



十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$ 则 X 的概率分布函数 $F(x)=$____________.

(2)设随机事件 A、B 及其和事件的概率分别是 0.4、0.3 和 0.6,若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$____________.

(3) 已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松 ($Poisson$) 分布, 即 $P\{X=k\} = \frac{2^k e^{-2}}{k!}, k = 0,1,2,\cdots$, 则随机变量 $Z = 3X - 2$ 的数学期望 $E(Z)=$____________.

十一、（本题满分 6 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D: 0 < x < 1, |y| < x$ 内服从均匀分布,求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z = 2X + 1$ 的方差 $D(Z)$.