1989 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1)已知 $f'(3)=2,$ 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$____________.

(2)设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt,$ 则 $f(x)=$____________.

(3)设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2},$ 则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)ds=$____________.

(4)向量场 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=$____________.

(5)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix},\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$ 则矩阵 $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

(A)有且仅有水平渐近线 (B)有且仅有铅直渐近线

(C)既有水平渐近线,又有铅直渐近线 (D)既无水平渐近线,又无铅直渐近线

(2)已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0,$ 则点的坐标是

(A) $(1,-1,2)$ (B) $(-1,1,2)$

(C) $(1,1,2)$ (D) $(-1,-1,2)$

(3)设线性无关的函数都是二阶非齐次线性方程的解是任意常数,则该非齐次方程的通解是

(A) $c_1y_1+c_2y_2+y_3$ (B) $c_1y_1+c_2y_2-(c_1+c_2)y_3$

(C) $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$ (D) $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$

(4)设函数 $f(x)=x^2,0\le x<1,$ 而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,-\infty<x<+\infty,$ 其中

$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, n = 1,2,3,\cdots$, 则 $S(-\frac{1}{2})$ 等于

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

(5)设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵,且 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}| = 0$, 则 $\mathbf{A}$ 中

(A)必有一列元素全为 0　　(B)必有两列元素对应成比例

(C)必有一列向量是其余列向量的线性组合　　(D)任一列向量是其余列向量的线性组合

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)设 $z = f(2x-y) + g(x, xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $g(u,v)$ 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(2)设曲线积分 $\int_c xy^2 dx + y\varphi(x)dy$ 与路径无关,其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,且 $\varphi(0) = 0$, 计算

$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x)dy$ 的值.

(3)计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

四、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.

六、（本题满分 7 分）

证明方程 $\ln x = \frac{x}{\mathrm{e}} - \int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、（本题满分 6 分）

问 λ 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

有解,并求出解的一般形式.

八、(本题满分 8 分)

假设λ为n阶可逆矩阵$\mathbf{A}$的一个特征值,证明

(1)$\dfrac{1}{\lambda}$为$\mathbf{A}^{-1}$的特征值.

(2)$\dfrac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$为$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^*$的特征值.

九、(本题满分 9 分)

设半径为R的球面$\sum$的球心在定球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$上,问当R为何值时,球面$\sum$在定球面内部的那部分的面积最大?

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)已知随机事件A的概率$P(A)=0.5,$ 随机事件B的概率$P(B)=0.6$及条件概率$P(B|A)=0.8,$则和事件$A\bigcup B$的概率$P(A\bigcup B)=$____________.

(2)甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为 0.6 和 0.5,现已知目标被命中,则它是甲射中的概率为____________.

(3)若随机变量ξ在$(1,6)$上服从均匀分布,则方程$x^2+\xi x+1=0$有实根的概率是____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量X与Y独立,且X服从均值为 1、标准差(均方差)为$\sqrt{2}$的正态分布,而Y服从标准正态分布.试求随机变量$Z=2X-Y+3$的概率密度函数.