1988 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n3^n}$ 的收敛域.

(2)设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}, f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geq 0$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

(3) 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧,计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

二、填空题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分.把答案填在题中横线上)

(1)若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}$, 则 $f'(t)=$____________.

(2)设 $f(x)$ 连续且 $\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$, 则 $f(7)=$____________.

(3)设周期为 2 的周期函数,它在区间 $(-1,1]$ 上定义为 $f(x)=\begin{cases}2 & -1<x\leq 0\\ x^2 & 0<x\leq 1\end{cases}$,则的傅里叶 $(Fourier)$ 级数在 $x=1$ 处收敛于____________.

(4)设 4 阶矩阵 $\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4], \mathbf{B}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量,且已知行列式 $|\mathbf{A}|=4, |\mathbf{B}|=1$, 则行列式 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=$____________.

三、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$, 则 $\Delta x\to 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是

(A)与 Δx 等价的无穷小　　(B)与 Δx 同阶的无穷小

(C)比 Δx 低阶的无穷小　　(D)比 Δx 高阶的无穷小

(2) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解且 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处

(A)取得极大值　　(B)取得极小值

(C)某邻域内单调增加　　(D)某邻域内单调减少

(3)设空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leq R^2, z\geq 0, \Omega_2: x^2+y^2+z^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$, 则:

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} xdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} dv$

(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} ydv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} ydv$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} zdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} zdv$

(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdv$

(4)设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,则此级数在 $x=2$ 处

(A)条件收敛

(B)绝对收敛

(C)发散

(D)收敛性不能确定

(5) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\le s\le n)$ 线性无关的充要条件是

(A)存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\ne 0$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量均线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量不能用其余向量线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量都不能用其余向量线性表示

四、(本题满分 6 分)

设 $u=yf(\frac{x}{y})+xg(\frac{y}{x})$, 其中函数 f 、g 具有二阶连续导数,求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

五、(本题满分 8 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$, 其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x-1$ 在该点处的切线重合,求函数 $y=y(x)$.

六、（本题满分 9 分）

设位于点 $(0,1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$($k>0$ 为常数, r 为 A 质点与 M 之间的距离),质点 M 沿直线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$, 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

七、（本题满分 6 分）

已知 $\mathbf{AP}=\mathbf{BP}$, 其中 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{A},\mathbf{A}^5$.

八、（本题满分 8 分）

已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似.

(1)求 x 与 y.

(2)求一个满足 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$ 的可逆阵 $\mathbf{P}$.

九、（本题满分 9 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$, 证明:在 (a,b) 内存在唯一的 ξ, 使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi), x=a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi), x=b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍.

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设在三次独立试验中,事件 A 出现的概率相等,若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\dfrac{19}{27}$, 则事件 A 在一次试验中出现的概率是___________.

(2)若在区间 $(0,1)$ 内任取两个数,则事件”两数之和小于 $\dfrac{6}{5}$”的概率为___________.

(3)设随机变量 X 服从均值为 10,均方差为 0.02 的正态分布,已知

$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du, \phi(2.5)=0.9938,$$

则 X 落在区间 $(9.95,10.05)$ 内的概率为___________.

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1-x^2)}$, 求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.