1987 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1)当 $x=$________时,函数 $y=x\cdot 2^x$ 取得极小值.

(2)由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=\mathrm{e}+1-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是________.

(3)与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ 都平行且过原点的平面方程为________.

(4)设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$, 则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=$________.

(5)已知三维向量空间的基底为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$, 则向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)$ 在此基底下的坐标是________.

二、(本题满分 8 分)

求正的常数 a 与 b, 使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$ 成立.

三、(本题满分 7 分)

(1)设 f 、 g 为连续可微函数, $u=f(x,xy),v=g(x+xy)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

(2)设矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足关系式 $\mathbf{AB}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}$, 其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, 求矩阵 $\mathbf{B}$.

四、(本题满分 8 分)

求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解,其中常数 $a>0$.

五、选择题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$　　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　　(D) $f(x)$ 的导数不存在

(2)设 $f(x)$ 为已知连续函数, $I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx$, 其中 $t>0,s>0$, 则 I 的值

(A)依赖于 s 和 t　　(B)依赖于 s 、 t 和 x

(C)依赖于 t 、 x ,不依赖于 s　　(D)依赖于 s ,不依赖于 t

(3)设常数 $k>0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$

(A)发散　　(B)绝对收敛

(C)条件收敛　　(D)散敛性与 k 的取值有关

(4)设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=a\neq 0$, 而 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\mathbf{A}^*|$ 等于

(A) a　　(B) $\frac{1}{a}$

(C) a^{n-1}　　(D) a^n

六、(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\bullet 2^n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

七、(本题满分 10 分)

求曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy,$$

其中 Σ 是由曲线 $f(x)=\begin{cases} z=\sqrt{y-1} & 1\le y\le 3 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周而成的曲面,其法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微,对于 $[0,1]$ 上的每一个 x, 函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内,且 $f'(x)\neq 1$,证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x, 使得 $f(x)=x$.

九、(本题满分 8 分)

问 a,b 为何值时,现线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解,无解,有无穷多解?并求出有无穷多解时的通解.

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设在一次实验中,事件 A 发生的概率为 p,现进行 n 次独立试验,则 A 至少发生一次的概率为__________;而事件 A 至多发生一次的概率为__________.

(2)有两个箱子,第 1 个箱子有 3 个白球,2 个红球, 第 2 个箱子有 4 个白球,4 个红球.现从第 1 个箱子中随机地取 1 个球放到第 2 个箱子里,再从第 2 个箱子中取出 1 个球,此球是白球的概率为__________.已知上述从第 2 个箱子中取出的球是白球,则从第一个箱子中取出的球是白球的概率为__________.

(3)已知连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2x-1}$, 则 X 的数学期望为__________, X 的方差为__________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X,Y 相互独立,其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\begin{cases}0\le x\le 1\\ \text{其它}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{matrix}\mathrm{e}^{-y}\\0\end{matrix}\quad\begin{matrix}y>0\\y\le 0\end{matrix},$$

求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.