

2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 ()

- (A) $ab = \frac{1}{2}$ (B) $ab = -\frac{1}{2}$ (C) $ab = 0$ (D) $ab = 2$

【答案】A

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x}{ax} = \frac{1}{2a}$, $\because f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续 $\therefore \frac{1}{2a} = b \Rightarrow ab = \frac{1}{2}$. 选 A.

(2) 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = f(-1) = 1, f(0) = -1$ 且 $f''(x) > 0$, 则 ()

- (A) $\int_{-1}^1 f(x) dx > 0$ (B) $\int_{-1}^1 f(x) dx < 0$
(C) $\int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^1 f(x) dx$ (D) $\int_{-1}^0 f(x) dx < \int_0^1 f(x) dx$

【答案】B

【解析】

$f(x)$ 为偶函数时满足题设条件，此时 $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$, 排除 C, D.

取 $f(x) = 2x^2 - 1$ 满足条件，则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (2x^2 - 1) dx = -\frac{2}{3} < 0$, 选 B.

(3) 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 ()

- (A) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ (B) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
(C) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ (D) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

【答案】D

【解析】特值法：(A) 取 $x_n = \pi$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi$, A 错;

取 $x_n = -1$, 排除 B, C. 所以选 D.

(4) 微分方程的特解可设为

- (A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$ (B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$
 (C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$ (D) $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

【答案】A

【解析】特征方程为： $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$

$\therefore f(x) = e^{2x}(1 + \cos 2x) = e^{2x} + e^{2x} \cos 2x \therefore y_1^* = Ae^{2x}, y_2^* = xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x),$

故特解为： $y^* = y_1^* + y_2^* = Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$, 选 C.

(5) 设 $f(x, y)$ 具有一阶偏导数, 且对任意的 (x, y) , 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则

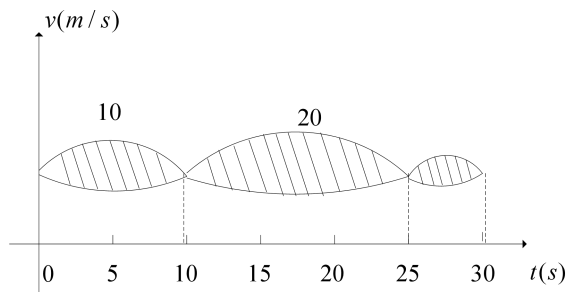
- (A) $f(0, 0) > f(1, 1)$ (B) $f(0, 0) < f(1, 1)$ (C) $f(0, 1) > f(1, 0)$ (D) $f(0, 1) < f(1, 0)$

【答案】C

【解析】 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0 \Rightarrow f(x, y)$ 是关于 x 的单调递增函数, 是关于 y 的单调递减函数,

所以有 $f(0, 1) < f(1, 1) < f(1, 0)$, 故答案选 D.

(6) 甲乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$, 三块阴影部分面积的数值依次为 10, 20, 3, 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位: s), 则 ()



- (A) $t_0 = 10$ (B) $15 < t_0 < 20$ (C) $t_0 = 25$ (D) $t_0 > 25$

【答案】B

【解析】从 0 到 t_0 这段时间内甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0} v_1(t)dt, \int_0^{t_0} v_2(t)dt$, 则乙要追上甲, 则

$$\int_0^{t_0} v_2(t) - v_1(t)dt = 10, \text{ 当 } t_0 = 25 \text{ 时满足, 故选 C.}$$

(7) 设 A 为三阶矩阵, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为可逆矩阵, 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\quad)$

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2$ (B) $\alpha_2 + 2\alpha_3$ (C) $\alpha_2 + \alpha_3$ (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2$

【答案】 B

【解析】

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AP = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = \alpha_2 + 2\alpha_3,$$

因此 B 正确。

(8) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则 ()

- (A) A 与 C 相似, B 与 C 相似 (B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似
(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似 (D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

【答案】 B

【解析】由 $|\lambda E - A| = 0$ 可知 A 的特征值为 2, 2, 1,

$$\text{因为 } 3 - r(2E - A) = 1, \therefore A \text{ 可相似对角化, 即 } A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

由 $|\lambda E - B| = 0$ 可知 B 特征值为 2, 2, 1.

因为 $3 - r(2E - B) = 2$, $\therefore B$ 不可相似对角化, 显然 C 可相似对角化, $\therefore A \sim C$, 但 B 不相似于 C .

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 曲线 $y = x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)$ 的斜渐近线方程为_____

【答案】 $y = x + 2$

【解析】

$$\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{2}{x} = 2,$$

$$\therefore y = x + 2$$

(10) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____

【答案】 $-\frac{1}{8}$

【解析】

$$\frac{dy}{dt} = \cos t, \frac{dx}{dt} = 1 + e^t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{1 + e^t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\cos t}{1 + e^t} \right)'}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t (1 + e^t) - \cos t e^t}{(1 + e^t)^2} \Rightarrow \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = -\frac{1}{8}$$

(11) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx =$ _____

【答案】 1

【解析】

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx &= - \int_0^{+\infty} \ln(1+x) d \frac{1}{1+x} \\ &= - \left[\frac{\ln(1+x)}{1+x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = 1. \end{aligned}$$

(12) 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$, $f(0, 0) = 0$, 则

$f(x, y) =$ _____

【答案】 xye^y

【解析】 $f'_x = ye^y, f'_y = x(1+y)e^y, f(x, y) = \int ye^y dx = xye^y + c(y)$, 故

$$f'_y = xe^y + xye^y + c'(y) = xe^y + xye^y,$$

因此 $c'(y) = 0$ ，即 $c(y) = C$ ，再由 $f(0,0) = 0$ ，可得 $f(x,y) = xye^y$ 。

【答案】

【解析】

$$(13) \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 $\ln \cos 1$ 。

【解析】 交换积分次序：

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = \ln \cos 1.$$

$$(14) \text{ 设矩阵 } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ 的一个特征向量为 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 -1

【解析】 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ，由题设知 $A\alpha = \lambda\alpha$ ，故

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3+2a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

故 $a = -1$ 。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

$$(15) \text{ (本题满分 10 分) 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-te^t} dt}{\sqrt{x^3}}$$

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{x-te^t} dt}{\sqrt{x^3}}$ ，令 $x-t=u$ ，则有

$$\int_0^x \sqrt{x-te^t} dt = -\int_x^0 \sqrt{ue^{x+u}} du = \int_0^x \sqrt{ue^{x+u}} du$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{u} e^{x+u} du}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^u du}{x^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{u} e^u du}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} e^x}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(16) (本题满分 10 分) 设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$

【答案】 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'_1(1, 1), \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = f''_{11}(1, 1),$

【解析】

$$y = f(e^x, \cos x) \xrightarrow{x=0} y(0) = f(1, 1)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = (f'_1 e^x + f'_2 (-\sin x)) \Big|_{x=0} = f'_1(1, 1) \cdot 1 + f'_2(1, 1) \cdot 0 = f'_1(1, 1)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = f''_{11} e^{2x} + f''_{12} e^x (-\sin x) + f''_{21} e^x (-\sin x) + f''_{22} \sin^2 x + f'_1 e^x - f'_2 \cos x$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = f''_{11}(1, 1) + f'_1(1, 1) - f'_2(1, 1)$$

结论:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'_1(1, 1)$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = f''_{11}(1, 1) + f'_1(1, 1) - f'_2(1, 1)$$

(17) (本题满分 10 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) dx^2 = \frac{1}{2} (\ln(1+x) \cdot x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x} dx) = \frac{1}{4}$$

(18) (本题满分 10 分) 已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值

【答案】极大值为 $y(1)=1$ ，极小值为 $y(-1)=0$

【解析】

两边求导得：

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3 + 3y' = 0 \quad (1)$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$

对 (1) 式两边关于 x 求导得 $6x + 6y(y')^2 + 3y^2 y'' + 3y'' = 0 \quad (2)$

将 $x = \pm 1$ 代入原题给的等式中，得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ or $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ ，

将 $x=1, y=1$ 代入 (2) 得 $y''(1) = -1 < 0$

将 $x=-1, y=0$ 代入 (2) 得 $y''(-1) = 2 > 0$

故 $x=1$ 为极大值点， $y(1)=1$ ； $x=-1$ 为极小值点， $y(-1)=0$

(19) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1) > 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ ，证明：

(I) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(II) 方程 $f(x)f'(x) + (f'(x))^2 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

【答案】

【解析】

(I) $f(x)$ 二阶导数， $f(1) > 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$

解：1) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ ，根据极限的保号性得

$\exists \delta > 0, \forall x \in (0, \delta)$ 有 $\frac{f(x)}{x} < 0$ ，即 $f(x) < 0$

进而 $\exists x_0 \in (0, \delta)$ 有 $f(x_0) < 0$

又由于 $f(x)$ 二阶可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上必连续

那么 $f(x)$ 在 $[\delta, 1]$ 上连续，由 $f(\delta) < 0, f(1) > 0$ 根据零点定理得：

至少存在一点 $\xi \in (\delta, 1)$ ，使 $f(\xi) = 0$ ，即得证

(II) 由 (1) 可知 $f(0) = 0$ ， $\exists \xi \in (0, 1)$ ，使 $f(\xi) = 0$ ，令 $F(x) = f(x)f'(x)$ ，则 $f(0) = f(\xi) = 0$

由罗尔定理 $\exists \eta \in (0, \xi)$, 使 $f'(\eta) = 0$, 则 $F(0) = F(\eta) = F(\xi) = 0$,

对 $F(x)$ 在 $(0, \eta), (\eta, \xi)$ 分别使用罗尔定理:

$\exists \eta_1 \in (0, \eta), \eta_2 \in (\eta, \xi)$ 且 $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1), \eta_1 \neq \eta_2$, 使得 $F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$, 即

$F'(x) = f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$ 在 $(0, 1)$ 至少有两个不同实根。

得证。

(20) (本题满分 11 分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 计算二重积分 $\iint_D (x+1)^2 dx dy$ 。

【答案】 $\frac{5\pi}{4}$

【解析】 $\iint_D (x+1)^2 dx dy = \iint_D (x^2 + 2x + 1) dx dy = 2 \iint_D x^2 dx dy + \iint_D 2x dx dy + \iint_D dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cos^2 \theta dr + \pi = \frac{5\pi}{4}$

(21) (本题满分 11 分) 设 $y(x)$ 是区间 $(0, \frac{3}{2})$ 内的可导函数, 且 $y(1) = 0$, 点 P 是曲线 $L: y = y(x)$ 上任意一点, L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0, Y_p)$, 法线与 x 轴相交于点 $(X_p, 0)$, 若 $X_p = Y_p$, 求 L 上点的坐标 (x, y) 满足的方程。

【答案】

【解析】 设 $p(x, y(x))$ 的切线为 $Y - y(x) = y'(x)(X - x)$, 令 $X = 0$ 得 $Y_p = y(x) - y'(x)x$, 法线

$Y - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(X - x)$, 令 $Y = 0$ 得 $X_p = x + y(x)y'(x)$ 。由 $X_p = Y_p$ 得 $y - xy'(x) = x + yy'(x)$, 即

$\left(\frac{y}{x} + 1\right)y'(x) = \frac{y}{x} - 1$ 。令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = ux$, 按照齐次微分方程的解法不难解出

$\frac{1}{x} \ln(u^2 + 1) + \arctan u = -\ln|x| + C$,

(22) (本题满分 11 分) 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 。

(I) 证明: $r(A) = 2$

(II) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解。

【答案】(I) 略；(II) 通解为 $k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R$

【解析】

(I) 证明：由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 可得 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$ ，即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，

因此， $|A| = |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3| = 0$ ，即 A 的特征值必有 0。

又因为 A 有三个不同的特征值，则三个特征值中只有 1 个 0，另外两个非 0。

且由于 A 必可相似对角化，则可设其对角矩阵为 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

$\therefore r(A) = r(\Lambda) = 2$

(II) 由 (I) $r(A) = 2$ ，知 $3 - r(A) = 1$ ，即 $Ax = 0$ 的基础解系只有 1 个解向量，

由 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$ 可得 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ ，则 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ，

又 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ，即 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta$ ，则 $Ax = \beta$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，

综上， $Ax = \beta$ 的通解为 $k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R$

(23) (本题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换

$X = QY$ 下的标准型 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ ，求 a 的值及一个正交矩阵 Q 。

【答案】 $a = 2; Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, f \underline{\underline{=}} \underline{\underline{Q}}y = -3y_1^2 + 6y_2^2$

【解析】

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX, \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$$

由于 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX$ 经正交变换后, 得到的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$,

$$\text{故 } r(A) = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 2,$$

将 $a = 2$ 代入, 满足 $r(A) = 2$, 因此 $a = 2$ 符合题意, 此时 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 6,$$

由 $(-3E - A)x = 0$, 可得 A 的属于特征值 -3 的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

由 $(6E - A)x = 0$, 可得 A 的属于特征值 6 的特征向量为 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

由 $(0E - A)x = 0$, 可得 A 的属于特征值 0 的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 彼此正交, 故只需单位化即可:

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T,$$

$$\text{则 } Q = (\beta_1 \beta_2 \beta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad Q^T A Q = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) \stackrel{x=0y}{=} -3y_1^2 + 6y_2^2$$

