

2016 年考研数二真题及答案解析

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的

(1) 设 $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$, $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$, 则 () .

A. a_1, a_2, a_3

B. a_2, a_3, a_1

C. a_2, a_1, a_3

D. a_3, a_2, a_1

【答案】 B

【解析】

$$\text{当 } x \rightarrow 0^+ \text{ 时, } a_1 = x \cos \sqrt{x} - 1 \sim x \left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2$$

$$a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x}) \sim x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$$

$$a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x$$

所以, 从低到高的顺序为 a_2, a_3, a_1 , 选 B.

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 () .

A. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$

B. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

D. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

【答案】 D

【解析】对函数 $f(x)$ 做不定积分可得原函数, $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$,

因此选择 D.

(3) 反常函数① $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$, ② $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为 () .

A. ①收敛, ②收敛

B. ①收敛, ②发散

C. ①发散, ②收敛

D. ①发散, ②发散

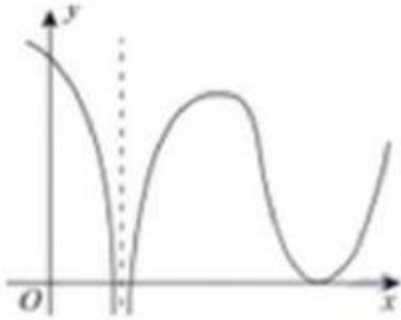
【答案】 B

【解析】① $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{x}} d\frac{1}{x} = -[\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} - \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}] = -(0 - 1) = 1$ 收敛.

② $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{x}} d\frac{1}{x} = -e^{\frac{1}{x}} \Big|_0^{+\infty} = -[\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}] = +\infty$ 发散.

所以, 选 B.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 () .



- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
- B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
- C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
- D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

【答案】 B

【解析】 根据图像可知导数为零的点有 3 个，但是最右边的点左右两侧导数均为正值，因此不是极值点，故有 2 个极值点，而拐点是一阶导数的极值点或者是不可导点，在这个图像上，一阶导数的极值点有 2 个，不可导点有 1 个，因此有 3 个拐点。

卡巴学长

(5) 设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二级连续导数, 且 $f_i''(x_0) < 0(i=1,2)$, 若两条求曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$, 且在该点曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$, 则在 x_0 的某个邻域内, 有 () .

A. $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$.

B. $f_2(x) \leq f_1(x) \leq g(x)$.

C. $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$.

D. $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$.

【答案】 A .

【解析】 因 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 在 (x_0, y_0) 有公切线, 则 $f_1(x_0)=f_2(x_0), f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$.

又 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 在 (x_0, y_0) 处的曲率关系为 $k_1 > k_2$.

$$\text{因 } k_1 = \frac{|f_1''(x_0)|}{[1+f_1'^2(x_0)]^{3/2}}, k_2 = \frac{|f_2''(x_0)|}{[1+f_2'^2(x_0)]^{3/2}} .$$

又 $f_1''(x_0) < 0, f_2''(x_0) < 0$, 则 $f_1''(x_0) < f_2''(x_0) < 0$.

从而在 x_0 的某个邻域内 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为凸函数, 故 $f_1(x) \leq g(x), f_2(x) \leq g(x)$, 排除 C, D .

令 $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$, 则 $F(x_0)=0, F'(x_0)=0, F''(x_0) < 0$.

由极值的第二充分条件得 $x=x_0$ 为极大值点 .

则 $F(x) \leq F(x_0)=0$, 即 $f_1(x) \leq f_2(x)$.

综上所述, 应选 A .

(6) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则 ()。

A. $f'_x - f'_y = 0$

B. $f'_x + f'_y = 0$

C. $f'_x - f'_y = f$

D. $f'_x + f'_y = f$

【答案】 D

【解析】

$$f'_x = \frac{e^x(x-y) - e^x}{(x-y)^2}, f'_y = \frac{0 + e^x}{(x-y)^2} = \frac{e^x}{(x-y)^2}$$
$$\therefore f'_x + f'_y = \frac{e^x(x-y) - e^x + e^x}{(x-y)^2} = \frac{e^x}{x-y} = f$$

选 D。

(7) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ()。

A. A^T 与 B^T 相似

B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似

C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似

D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

【答案】 C

【解析】

因为 A 与 B 相似, 因此存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 于是有:

$$(P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^T)^{-1} = B^T, \text{ 即 } A^T \sim B^T,$$

$$(P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}, \text{ 因此 } A^{-1} \sim B^{-1},$$

$$P^{-1}(A + A^{-1})P = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = B + B^{-1}, \text{ 因此 } A + A^{-1} \sim B + B^{-1},$$

而 C 选项中, $P^{-1}A^T P$ 不一定等于 B^T , 故 C 不正确, 选择 C。

(8) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则 ()。

- A. $a > 1$
- B. $a < -2$
- C. $-2 < a < 1$
- D. $a = 1$ 或 $a = -2$

【答案】 C

【解析】

$$\text{二次型矩阵 } A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a - 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1)(\lambda - a + 1)^2 = 0$$

∴ A 的特征值为 $\lambda_1 = a + 2, \lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$

∵ 二次型的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则 $\begin{cases} a + 2 > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases}$

所以, $-2 < a < 1$, 所以, 选 C。

二、填空题 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将所选项前的字母填写在答题纸指定位置上

(9) 曲线 $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为_____。

【答案】 $y = x + \frac{\pi}{2}$

【解析】

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x(1+x^2)} + \frac{\arctan(1+x^2)}{x} \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{1+x^2} - x + \arctan(1+x^2) \right] = \frac{\pi}{2},$$

所以，斜渐近线方程为 $y = x + \frac{\pi}{2}$ 。

(10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \dots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$ _____。

【答案】 $\sin 1 - \cos 1$

【解析】

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sin \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \sin \frac{n}{n} \right) \\ &= \int_0^1 x \sin x dx = \sin 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

卡巴学长

(11) 以 $y = x^2 - e^x$ 和 $y = x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为_____.

【答案】 $y' - y = 2x - x^2$

【解析】 $x^2 - (x^2 - e^x)$ 为对应齐次方程组的解, 即 e^x 是 $y' - y = 0$ 的解;

设非齐次方程为 $y' - y = f(x)$, 将 $y = x^2$ 代入得 $f(x) = 2x - x^2$,

所求方程为 $y' - y = 2x - x^2$.

(12) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $f(x) = (x+1)^2 + 2\int_0^x f(t)dt$, 则当 $n \geq 2$ 时,

$f^{(n)}(0) =$ _____.

【答案】 $5 \cdot 2^{n-1}$

【解析】

$$f(x) = (x+1)^2 + 2\int_0^x f(t)dt$$

$$f'(x) = 2(x+1) + 2f(x)$$

$$f''(x) = 2 + 2f'(x), f'''(x) = 2f''(x)$$

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-2} f''(x) (n \geq 2)$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 2 + 2 = 4, f''(0) = 10.$$

$$f^{(n)}(0) = 2^{n-1} \cdot 5 = 5 \cdot 2^{n-1}$$

卡巴学长

(13) 已知动点 P 在曲线 $y = x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 P 间的距离为 l . 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 V_0 , 则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时, l 对时间的变化率是

_____.

【答案】 $2\sqrt{2}V_0$

【解析】

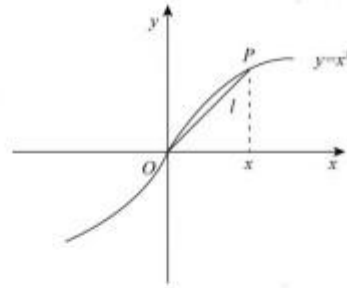
设 P 的坐标为 (x, x^3) , 则由题意

$$\frac{dx}{dt} = v_0$$

$$L = \sqrt{(x^3)^2 + x^2} = \sqrt{x^6 + x^2}$$

则 L 对 t 的变化率

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{6x^3 + 2x}{2\sqrt{x^6 + x^2}} \cdot v_0$$



$$\left. \frac{dl}{dt} \right|_{x=1} = \frac{8}{2\sqrt{2}} v_0 = 2\sqrt{2}v_0$$

(14) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a =$ _____.

兀兀兀兀

【答案】 2 ↵

【解析】 ↵

$$\because A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix} \text{与} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{等价}$$

$$\therefore r(A) = r(B)$$

$$\because B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore r(B)$$

$$\therefore |A| = 0, \text{即} \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0, \text{得} a = 2 \text{或} a = -1$$

$$\text{当} a = -1 \text{时, } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{此时 } r(A) = 1 \text{ 不合题意}$$

$$\therefore a = 2$$

三、解答题，15~23 小题，共 94 分，请将所选项前的字母填写在答题纸制定位置上，
解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分) ↵

$$\text{求极限} \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\text{【答案】 } e^{\frac{1}{3}} \text{ ↵}$$

【解析】 ↵

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{2^4 x^4}{4!} + 2x \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) - 1 + o(x^4)}{x^2}} \\ &= e^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(16) (本题满分 10 分) ↵

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值. ↵

【答案】 $f'(x) = 4x^2 - 2x$ ↵

$f(\frac{1}{2})$ 为最小值, 最小值为 $\frac{1}{4}$ ↵

【解析】 ↵

$f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$ ↵

当 $0 < x < 1$ 时, ↵

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x |t^2 - x^2| dt + \int_x^1 |t^2 - x^2| dt \\ &= \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt \\ &= x^3 - \frac{1}{3}x^3 + \int_x^1 t^2 dt - x^2(1-x) \\ &= \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

故 $f'(x) = 4x^2 - 2x$

$x \geq 1$, $f(x) = \int_0^1 (x^2 - t^2) dt = x^2 - \frac{1}{3}$

故 $f'(x) = 2x$,

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$0 < x < 1$, 令 $f'(x) = 4x^2 - 2x = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$

$f''(x) = 8x - 2$, $f''(\frac{1}{2}) = 2 > 0$. ↵

$\therefore x = \frac{1}{2}$ 为最小值点, 最小值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. ↵

当 $x \geq 1$ 时, 令 $f'(x) = 2x = 0$, 得 $x = 0$ (舍) ↵

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$. ↵

(17) (本题满分 10 分) ↵

已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定 $z = z(x, y)$ 的极值. ↵

【答案】极大值为 $z(-1, -1) = 1$ ↵

【解析】 ↵

(1) 方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ ① ↵

两边对 x, y 分别求偏导得 ↵

$$2xz + (x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0 \text{ ②} \quad \leftarrow$$

$$2yz + (x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} + 2 = 0 \text{ ③} \quad \leftarrow$$

$$\text{令 } \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 得 } \begin{cases} xz + 1 = 0 \\ yz + 1 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } z = 0 \text{ (舍) 或 } y = x. \quad \leftarrow$$

$$\therefore \text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } \begin{cases} z = \frac{1}{-x} \\ y = x \end{cases} \text{ 代入原式 } (x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0 \text{ 得} \quad \leftarrow$$

$$2x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + \ln\left(-\frac{1}{x}\right) + 2(2x + 1) = 0 \quad \leftarrow$$

解得 $x = -1, y = -1, z = 1$, 则 $(-1, -1)$ 为驻点. ↵

卡巴学长

(2) ②式两边对 x, y 分别求偏导得, \leftarrow

$$2z + 2x \frac{\partial z}{\partial x} + 2x \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(-\frac{1}{z^2}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ ④} \leftarrow$$

$$2x \frac{\partial z}{\partial y} + 2y \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \text{ ⑤} \leftarrow$$

③式两边对 y 求偏导得 \leftarrow

$$2z + 2y \frac{\partial z}{\partial y} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ ⑥} \leftarrow$$

将 $x=-1, y=-1, z=1$ 代入⑤⑥得 \leftarrow

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2}{3} \leftarrow$$

$$AC - B^2 = \frac{4}{9} > 0, A < 0$$

$\therefore x=-1, y=-1$ 为极大值点, 极大值为 $z=1$. \leftarrow



(18) (本题满分 10 分) ↵

设 D 是由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy$. ↵

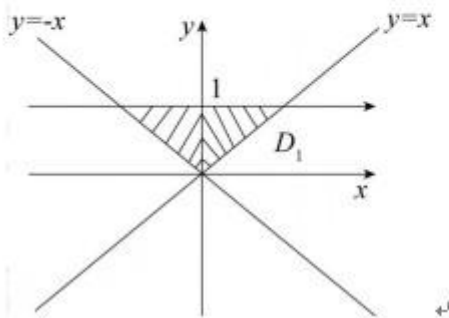
【答案】 $1 - \frac{\pi}{2}$ ↵

【解析】 ↵

①积分区域如图：

② D 关于 y 轴对称而 $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ 与 $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$ 关于 x 为偶函数.

$$\begin{aligned} & \therefore \iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \iint_D \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy - \iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy \\ &= 2 \iint_D \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy - 0 \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2} r dr \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) dr \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sin\theta}} d\theta \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 \theta d\theta - \frac{\pi}{4} \\ &= \cot \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



(19) (本题满分 10 分) ↵

已知函数 $y_1(x) = e^x, y_2(x) = u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ 的两个解, 若 $u(-1) = e, u(0) = -1$, 求 $u(x)$ 并写出微分方程的通解. ↵

【答案】 $y(x) = c_1 e^x + c_2 (2x+1)e^x$, D_1, D_2 为任意实数. ↵

【解析】 ↵

$y_2'(x) = (u'+u)e^x, y_2''(x) = (u'' + 2u' + u)e^x$, 代入方程得

$$(2x-1)u'' + (2x-3)u' = 0,$$

令 $p = u', p' = u''$, 则 $(2x-1)p' + (2x-3)p = 0$,

解得 $p = c(2x-1)e^{-x}$, 即 $\frac{du}{dx} = c(2x-1)e^{-x}$,

解得 $u(x) = -c(2x+1)e^{-x} + c_1$

又 $u(-1) = e, u(0) = -1$, 则 $u(x) = -(2x+1)e^{-x}$,

方程的通解为 $y(x) = c_1 e^x + c_2 (2x+1)e^{-x}$.



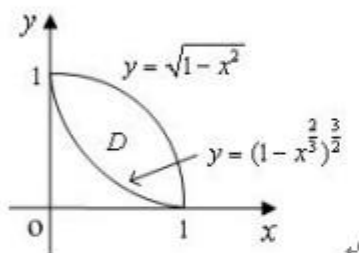
(20) (本题满分 11 分) ↵

设 D 是曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) 与 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴

转一周所得旋转体的体积和表面积. ↵

【答案】 体积为 $V = \frac{18\pi}{35}$, 表面积为 $S = \frac{16\pi}{5}$ ↵

【解析】 D 的图形如下图所示, D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积可看作两个体积之差, 即 ↵



↵

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 dx - \pi \int_0^1 \left[\left(1-x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2 dx = \pi \int_0^1 (1-x^2) dx - \pi \int_0^1 \left(1-x^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx \\ &= \pi \times \frac{2}{3} - \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) dt = \frac{2}{3} \pi - 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t (1-\sin^2 t) dt \\ &= \frac{2}{3} \pi - 3\pi \times (1, -1)_9 = \frac{2}{3} \pi - 3\pi \times \frac{16}{9 \times 7 \times 5} \\ &= \frac{18\pi}{35} \end{aligned}$$

↵

表面积 $A = A_1 + A_2$, 其中 ↵

$$A_1 = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1+y^2(x)} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\pi,$$

$$\text{由 } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \text{ 得 } y = \left(1-x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

↵

$$\begin{aligned} A_2 &= 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1+y^2(x)} dx = 2\pi \int_0^1 \left(1-x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} dx = -6\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t \cos t dt \\ &= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) = 6\pi \times \frac{1}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi}{5} \end{aligned}$$

↵

$$\text{故 } A = 2\pi + \frac{6\pi}{5} = \frac{16\pi}{5} \quad \leftarrow$$

(21) (本题满分 11 分) ↵

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0) = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值; ↵

(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 存在唯一零点. ↵

【答案】(1) $\frac{1}{3\pi}$ (2) 证明略. ↵

【解析】 ↵

(1) 由题设知 $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt + c$. $\because f(0) = 0 \therefore c = 0 \Rightarrow f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt$

$$\text{则函数平均值为 } \frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx}{\frac{3}{2}\pi - 0} = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} dx \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} dt \int_t^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos t}{2t-3\pi} dx$$

$$= \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos t}{2t-3\pi} \left(\frac{3}{2}\pi - t \right) dt = -\frac{1}{3\pi} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos t dt$$

$$= \frac{-1}{3\pi} \sin t \Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{3\pi}$$

(2) $\because f'(x) = \frac{\cos x}{2x-3\pi}$ ↵

$\therefore x \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ 时 $f'(x) < 0 \Rightarrow$ 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ 时, $f(x)$ 单调减少

而 $f(0) = 0$, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内无零点

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 则当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ 时, $f(x)$ 单调增加. ↵

由题意知, 显然 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ ↵

$$\begin{aligned} \text{而 } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-3\pi} dx \quad x = \frac{3}{2}\pi - t \quad \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\pi+u} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\pi+t} \right) \sin t dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt > 0 \end{aligned}$$

由零点定理知：\$f(x)\$ 在 \$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)\$ 内有唯一的零点。

综上知：\$f(x)\$ 在 \$\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)\$ 有唯一零点。

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵 \$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}\$, \$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}\$, 且方程组 \$Ax = \beta\$ 无解,

(1) 求 \$a\$ 的值

(2) 求方程组 \$A^T Ax = A^T \beta\$ 的通解

【答案】(1) \$a = 0\$ (2) 通解为 \$x = k(0, -1, 1)^T + (1, -2, 0)^T\$, 其中 \$k\$ 为任意常数

【解析】

(1)

$$\text{增广矩阵为: } (A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & -1 & 2a-1 & 1 \\ 0 & -a & a^2+a & 2a-2 \end{pmatrix}$$

方程组无解，那么系数矩阵的秩与增光矩阵的值不同，因此 \$a = 0\$。

$$(2) \text{ 将 } a = 0 \text{ 代入可得 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{因此可得 } A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A^T \beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{因此可得 } (A^T A, A^T \beta) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故可得 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$, 因此可得方程组的一个特解为 $(1, -2, 0)^T$, 令 $x_3 = 1$ 得到了

齐次解为: $(0, -1, 1)^T$, 因此得到了方程组的通解为:

$$x = k(0, -1, 1)^T + (1, -2, 0)^T, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

(23) (本题满分 11 分)

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

$$\text{【答案】 (I) } A^{99} = \begin{pmatrix} -2 + 2^{99} & 1 - 2^{99} & 2 - 2^{98} \\ -2 + 2^{100} & 1 - 2^{100} & 2 - 2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(II) } \beta_1 = (-2 + 2^{99})\alpha_1 + (-2 + 2^{100})\alpha_2;$$

$$\beta_2 = (1 - 2^{99})\alpha_1 + (1 - 2^{100})\alpha_2;$$

$$\beta_3 = (2 - 2^{98})\alpha_1 + (2 - 2^{99})\alpha_2$$

【解析】

(I) 利用相似对角化, 由 $|\lambda E - A| = 0$ 得到特征值为 $0, -1, -2$,

当 $\lambda = 0$ 时, 代入 $\lambda E - A$ 中, 求解方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 的解就是特征向量, 即 $r_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

同理得到其他的两个特征向量分别为: $\lambda = -1$ 对应的特征向量为 $r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$ 对应的

特征向量为 $r_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, \leftarrow

设 $P = (r_1, r_2, r_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 因此可得 \leftarrow

$$A^{99} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{99} P^{-1}, \text{ 根据矩阵 } P \text{ 可以求得其逆矩阵为 } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftarrow$$

因此有 \leftarrow

$$\begin{aligned} A^{99} &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{99} P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \\ &= \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(II) $B^2 = BA \Rightarrow B^3 = BBA = B^2A = BAA = BA^2$, 因此可得 $B^{100} = BA^{99}$, 所以 \leftarrow

$$B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) A^{99} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$

因此有 $\beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2$; \leftarrow

$$\beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2; \leftarrow$$

$$\beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2 \leftarrow$$