2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要 求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列反常积分收敛的是 ()

(A)

(B) Inx 7 ----- dx 2 X

(C)

(D) ·+s X 7 —dx

【答案】(D)

【解析】J 当五= -(x + 1)e—*, 则] +00 X ~^ dx =-(x + 1)e^-x|2 I+OO -lim (x + \)e^x = 3/ . 2 W

(2) 函数 / (x) = lim(1 + ~~~)¹ 在-Ko)内 连续

有可去间断点 有跳跃间断点 有无穷间断点

(A(B(C(D 案 \\/7 \\/7 \>v (B)

Sill t — lim

/(x)-lim(1 + -^—二 gi。″, =, , x^0, 故/(盼有可去间断点 $x = 0$.

x^a cos ⊥, X > 0 X。 (u>0, 〃〉 0), 若/(x)在 x = 0 处连续则: ()

【解析】

(B) 0<cr-Z7<1

0*0

(C) a—” 〉2　　　　(D) 0<a-ˆ<2

【答案】(A)

x^a cos -— 0

EE—　　　　二 lim x^{a} ˣ cos —

XTO+　　　　X。

【解析】x<0 时, r(x) = 0£(0)= 0

x>0 时，=ax】¹ cos- +(_1)x】sin- (_〃)˜丽˜

二　cos ⊥ + ″一阡’ sin ⊥

yP

y’(x)在 x = 0 处连续则：*f!(0)= f*’(0) = lim¹ cosˆ = 0 得「一 1>0

广(0)=1 哼广(x) =　　　　ax″-】 cos ⊥ + ″T—’ sin ⊥] =0

x^p　　　　x^p 丿

得：。一”一l〉0,答案选择 A

(4)设函数/’(x)在(-8,+8)内连续，其中二阶导数 *f(x)*的图形如图所示，则曲线

V = /(X)的拐点的个数为　　　　()

X

y↑

【答案】(C)

(5)设函数满足/ ^{x+}y ^ =%2 ~y^2 则来岩与爲 $0L$ ″=1 依次是 v=1

【解析】根据图像观察存在两点，二阶导数变号.则拐点个数为 2 个。

(A) !，0

(B) °，?

。4°

(D) 0,-|

【答案】(D)

【解析】此题考查二元复合函数偏导的求解.

令 $U = X+ v, v =$ — ，则 x = —, V = WK, 从而 $f(x+$ v, —) = A-^{2} - V^2 变为
■ X 1+V ″ 1+V ″ X ■

$$/■(″) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2$$ /(I —v)故 df _ 2w(l-v) df _ $2u$~

因而务 $$0, \frac{\partial f}{\partial v}\bigg|_{\substack{u=1\\v=1}}$$

1 + v du 1 + v ’ dv (1 +1，]

(6)设。是第一象限由曲线 2 斗=1，4 斗=1 与直线> = x，v = V3x 围成的平面区域，
T •故选$^{(D)}$ •

M=1

函数/(″)秤数上连续,则 jj$f(x, y')dxdy$ = $_D$

(A) $[Id0\backslash$ ~ f (rcos$0. rsin0ydr$
71 1 7 2sin26>

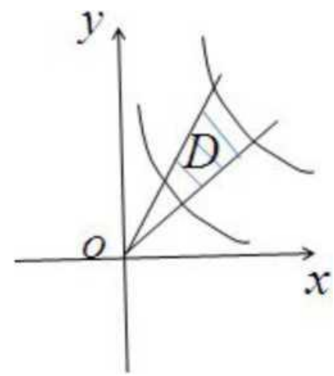
(B) pd 可石可 / (r cos $0.$ r sin 0 ^rdr
71 l 4 J2sin20

(C) 71 4 1 可 y (rcos 0. r sin 0^1r 2sin2。

(D) 卩刁。j，曾 f (rcos^, rsin^)(7r 71 4 1 J2sin20

【答案】(B)

【解析】根据图可得，在极坐标系下计算该二重积分的积分区域为



rr 4 rr 3 J2sin20 $\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$}

所以

D =J 弘可 71 4 √sin20 1 ˉJ2sin20 f (r cos 0, r sin ff)rdr

故选 B.

(7)设矩阵刀= <111、 1 2 a <1 4 , b = p] d .若集合。={1, 2}, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件为:

(A)　　(B) a wQ, d G Q

(C) a eQ, d wQ　　(D) a eQ, d G Q

【答案】

【解析】 (") = (1 1 1 1、 1 2 a d J 4 a^2 <1 1 1 1 0 1 ci — 1 d 0 0 — 1)(i —2) 1

由 $r(A) = r(A, b) < 3$，故 a = 1 或 a = 2， 同时 d = 1 或 $d = 2$。故选(D)

(8)设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 的标准形为 2 开+戈-戈，其中

$P = (e_1, e_2, e_3)$，若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$ 则 $f = (x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形

为:

(A) 2 * — >5 +

(C)　　　　(D) ^-yi+y1 + y1

【答案】(A)

【解析】由 $x = Py$ ^ 故 / = $x^TAx = y^T(P^TAP)y = 2y[+ >$; 一 . 旦

$P^TAP =$

')•

0　0、

0　1 =FC

-1

$$Q^T AQ = C^T (P^T AP)C = \begin{vmatrix} <2 & 0 & 0、\\ 0 & -1 & 0 \\ & 0 & b \end{vmatrix}$$

所以 $f = x^TAx = y\backslash Q^TAQ)y = 2y; -y; + y;$. 选(A)

二、填空题：**9∽14** 小题，每小题 4 分，共 **24** 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 3t + 1 \end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{f=1}$

【答案】48

【解析】虹 dx $\dfrac{dy}{dt} \Big/ \dfrac{dx}{dt}$ 二学 3（i+产）2 i+F

件号 3(1 + E= —dt dx dx 　$43(1+z^2)^2]\Big/\dfrac{dx}{dt}$ $= \dfrac{12/(1+/^2)}{1+尸} = 12/(1+/2)2$

$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1} = 48.$

(10)函数 /(X) = X^2-2^X 在 X = 0 处的〃阶导数 /"(0)=________

【答案】—1)(1n2 广 2

【解析】根据莱布尼茨公式得：

/3)(0)= C；2(2')(E = ~~〃(〃 T)~~2(m2)"q =〃(〃 —i)(in2 广 2

x=o 2

(11) 设 y(x)
连续，0(x) = J； *xf (t)dt,*若 0(1) = 1,R(1) = 5,则/'(1)= ____________________

【答案】2

[解析】已知 e(x) = x£、' ,求导得 *(p|x)* = j： *f(t)dt* + $2X^2$/(X^2),故有 0(1) = £/(/>// = 1,
"(1) = 1+ 2/ (1) = 5,则 /(1) = 2.

(12)__________设函数> = y(x)是微分方程 *y +y -2y* = 0 的解，且在 x = 0 处 y (x)取得极值 3,则 *y*

("=__________*»*____

【答案】e_2，+ 2e、

【解析】由题意知：>（0） = 3, >'（0） = 0,由特征方程：人 2 +人—2 =。解得 4=1 辺=一 2 所以微

分方程的通解为：$y = C_1e^x+C_2e^{2x}$代入>（0）= 3, >'（0）= 0 解得：C_1=2 C_2 =1 解得：y = 2e、+e—2、

（13）若函数 *Z* = z（x,j）由方程 $e^{x+2y+3z}$ + *xyz* = 1 确定，则 dz（。。广________________ 。

【答案】—§ （dx + 2d[y）

【解析】当 *x = 0, y = 0* 时 z = 0,则对该式两边求偏导可得（$3e^{x+2y+3z}$ + *xy*）—=—戸—

0X

（$3e^{x+2y+3z}$ +*xy*） - = -*xz*- $2e^{x+2y+3z}$ 。将（0,0,0）点值代入即有

dy

dz _ 1 dz _ 2

则可得 dz |(o. o)= —dx—dy = -|(dr + 2dy).
3 3 -

~dx (0,0)- V~dy (0,0)- 3

(14) 若 3 阶矩阵刀的特征值为 2,—2,1, $B = A'—A + E$，其中 E 为 3 阶单位阵，则行列式

网=一.

【答案】21

【解析】刀的所有特征值为 2,-2,1. B 的所有特征值为 3,7,1

所以 |3|=3x7x1 = 21。

三、解答题：**15〜23** 小题，共 **94** 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明 过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数/"(") = x + aln(1 + x) + Z)xsinx , g(x) = Ax³. 若_/(x)与 g(x)在 x T 0 时是等价无穷小，

求 a, b, k 的值.

【答案】a = — $1, k$ = —, b =—
3 2

【解析】

方法一：

XX X
因 为 ln(1 + x) = x —— + ——F 0(工 3), sin x ~ x —,

那么，

- x +a ln(1 + x) + sin x (1 + a)x + (Z> - —) x² + —x³ +o(x³)
lim
2 3
I。g3) I。 $\overline{kx^3}$ kx^3

可得：$\begin{cases} 1+1=0 \\ b-\frac{}{2}=0 \\ \frac{a}{3k}=1 \end{cases}$，所以，$\begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{}{2} \\ k=-\frac{1}{3} \end{cases}$

方法二：

由题意得

$$1=\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\lim \frac{x+a\ln(1+x)+\sin x}{kx^3}=\lim \frac{1+\frac{a}{1+x}+\sin x+\cos x}{3kx^2}$$

由分母 $\lim_{x\to 0} 3kx^2=0$，得分子 $\lim(1+\frac{a}{1+x}+\sin x+\cos x)=\lim(1+a)=0$，求得 c；

于是 $1=\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\lim \frac{1-\frac{}{1+x}\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$

$=\lim \frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2(1+x)}$

$=\lim \frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2}$

$=\lim \frac{1+b\sin x+b(1+x)\cos x+b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x}{6kx}$

由分母 $\lim_{x\to 0} 6kx=0$，得分子

$\lim_{x\to 0}[1+2\sin x+2b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x]=\lim_{x\to 0}(1+2b\cos x)=0$，

求得 $b=-\frac{}{2}$；

进一步，b 值代入原式

$$1=\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\lim \frac{1-\frac{}{}\sin x-(1+x)\cos x-\frac{}{}x\cos x+\frac{}{}x(1+x)\sin x}{6kx}$$

一 —cos x - cos x + (1 + x) sin x - — cos x + — x sin x + — (1 + x) sin x + — x sin x +—x(l + x) cos x

= lim^---2-----------2------------ 2--------------------2-------------2--------------------

a。 6k

=一求得 $k = -$ ˜.

6k 3

(16)（本题满分 10 分）

77 TT

设 A>0, D 是由曲线段 v = ^smx(0<x<-)及直线 $y = Q$, x =-所围成的平面区域，*，匕 分别表示 D 绕 x 轴与绕〉轴旋转成旋转体的体积，若 $V_Y=V_2$, 求 A 的值。

【答案】一 Q 71

【解析】由旋转体的体积公式，得

V、 - 7rf² {x)dx 7r{Asmxfdx - TZA²^-—C△S△X d x = 匆；—

71 71

V?二吳 2 岡{x)dx - -2 心 卩 xd cos x = 2TIA

Q

由题 V]=V2, 求得 A =—.

7T

(17)（本题满分 11 分）

已知函数 满足 M'(x,y) = 23 + 1)e', /;'(x,0) = (x + 1)顶，7(0,只)=/ + 2 只，求

【答案】极小值/(0,-1) = -1 【解析】= 2(v + 1)e“两边对 y 积分，得

£'(x”) = 2(。尸 + ,y +(p(x) = (y² + 2y)e^x + ^(x), 故 £'3,°) == 3+1)的,

求得 0(x) = e、(x + 1),

故 y^(x, y) = $(y^2 + 2y)e^x$ + (1 + x),两边关于 x 积分,得 f(x,

V)= $(v^2 + 2y)e^x$ + j 顶(1 + x)dx

= $(v^2+2v)e'$+j(l + x)t/e^v

=(v^2 + 2vK+(l + x)e^x - j$e^x dx$

=$(y^2 + 2y)e^x$ + (1 + x)e^x −e^x + C

=$(y^2 + 2y)e^x + xe^x$ **+ C**

由 f(0, y) = y^2+2y + C = y^2+2y,求得 C = **0.**

所以 7(x, V)= $(v^2 + 2y)e^x + xe^x$.

t = (/+2y)e″+e″+xe″=0

/; = (2v + 2K = 0

求得

Lv = T

又 fxx =顷一 + 2))e″ + 2e″ + xe^x ,

x: .=2(v+ir, m,

当 X = 0J = —1 时, A = /: (0,-1) = 1,B = £.(0,-1) = 0, C = /; (0,-1) = 2,

$AC-B^2$ > 0, /(0,-1) = —1 为极小值.

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分 jj x(x + y^dxdy ,其中 D = |(x,j)|x^2 + j^2 <2, y>x^2^

D

【答案】---

4 5

【解析】jj x(x + y)dxdy = JJ x^2dxdy

D D

i

o

=2 J； x^2dy

二 2 $-x^2)dx$

.1 /--------- 2 x=ˆsinf 2

—21 v 2 — dx — — 214 2 sin. t2 cos ˆ tdt —

J。 5 Jo 5

2 M=2t ,£ 2 7F 2

=2 $f^4\ \sin^2 2tdt$——=[$^2\ \sin^2 udu$ ——=------------.

J。 5 J。 5 4 5 (19)(本题满分 11 分)

已知函数/(x) = j $^1{}_x yl1 + f\ dt$ + j f $y/T+tdt$, 求/(x)零点的个数？

【答案】2 个

[解析]7’(x) = −A/1 + X^2 + $2x\backslash l1 + x^2$ = V1 + x^2 (2X −1)

令/■’(x) = 0, 得驻点为 x = J，

在(-8，!)，/(X)单调递减，在(?,+8)，/(X)单调递增

故/■(!)为唯一的极小值, 也是最小值.

而 f (_) = Jj $yjl +1^{\sim}dt$ + J，J1 + tdt = Ji J1 + 厂 dt — Ji J1 + tdt

2 2 1 2 4

—J] J1 + ,2 dt _ Ji J1 + id _ J″ J1 + td

2 2 4

在(丄,1)，J1 +尸 < VT+7，故 j： $sjl + t^2dt$ − j： $yjl + tdt$ < 0

Z 2 2

从而有/(I)< o

lim f(x) = lim[[J1 + 尸 /+ [$J1$ +泌]=+oo

lim f (x) = lim[[J1 + 尸 /+ [/\ + $idf\backslash$ = lim[[J1 +効_ [J1 + 户 $dt]$

XT+00，’ / XT+OOWx J1 XT+OOF J1

[J1 + tdt $2x\backslash l$ 1 + x^2

考虑 lim —˜-==— = lim —/ = +oo， 所以 lim f (x) = +oo.

戶力 5° V1 + X^2 i″

所以函数/' (X)在(-8,?)及(|,+00)上各有一个零点，所以零点个数为 2.

(20) (本题满分 10 分)

已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的 温差成正比，现将一初始温度为 120。。的物体在 20。。的恒温介质中冷却，30min 后该物体降至 30。。，若要将该物体的温度继续降至 21° C,还需冷却多长时间？

【答案】30mm

【解析】设 7 时刻物体温度为 X。，比例常数为仅>0),介质温度为加，则

一 =—k(x — m),从而 x(/) = Ce^*T + m ,
dt

x(0) = 120,m = 20,所以 C = 100,即" = 100/+20

又 x(-) = 30,所以阵 21n10,所以 x(/) = ^—+ 20
2 100，T

当 X = 21 时，/=1,所以还需要冷却 3 0 min.

(21) (本题满分 10 分)

已知函数/' (X)在区间 [a,+oo] 上具有 2 阶导数,/' (a) = 0 ，/■' (x)> 0,尸(x) > 0 ,设 b>a,

曲线〉=/(X)在点处的切线与 x 轴的交点是(*0,0),证明 a <x_0 <b。

【证明】根据题意得点处的切线方程为 y —了 (b) = f\b\x-b) 令 y = 0，得 x_0 = b — 因为 y' (x)>。所以/(x)单调递增，又因为/(a) = 0 所以/(b) >0,又因为 f'(b) > 0 所以 XQ=b-^-<b

又因为 a = 8-a-’张，而在区间(a, b)上应用拉格朗日中值定理有

~~—f (a)~~ =, , (©, & 修, (7) $b-a$

所以

因为 $f''(x) > 0$ 所以 $f'(x)$ 单调递增

所以尸(1) >尸(&)

所以 x_0 - <7 > 0 , 即 $x_0 > a$, 所以 $a < x_0 < b$, 结论得证.

(22)(本题满分 11 分)

0、

设矩阵 [二 -1 且 $A^3=0$-

a /

(1)求。的值；

(2)若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ˆ E 为 3 阶单位阵，求 X. 【答案】

, 2 _1,

$a = 0, X =$ —1 -1

2

【解析】

(I) $A^3 = 0$ 二> =0 二> $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$ - $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a^2 & a & -1 \\ \_C1 & 1 & a \end{vmatrix}$ $=a^3 = 0$ n i = 0

(II) 由题意知

$X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ˆ$X(E-A^2)-AX(E-A^2) = E$ ˆ$(E-A)X(E-A^2) = E$ˆ$X =(E-Ay^1 (E-A^2y^1$

$=[(E-A^2yE-A)$ ^-1 ^$X = (E-A^2-A]^1$

−1 1)

E-A^2~A = −1 1

−1 −1

|0 −1 1M1 0 0、| |<1 −1 −IM0 −1 0、|
|−1 1 IM) 1 0| | 0 −1 1 M1 0 0|
|−1 −1 2M3 0 b| |L −1 2 M0 0 b|

. . . X 二 −1

−b

(23)(本题满分 11 分)

设矩阵刀= |(0 2 −3、 −1 3 −3 <3 _2\ 1| 相似于矩阵 |<1 −2 0、 0 b 0 <0 3 L|

T |p1 −1 −IM0 −1 0、 0 1 −1ˆ1 0 0 、0 −2 1 M0 −1 b| |<1 −1 −IM0 −1 0、 0 1 −IM−1 0 0 E 0 −IM−2 −1 L|

T |<1 −1 0M2 0 −1、 0 1 0M1 1 −1 0 1M2 1 −b| |<1 0 0M3 1 −2、 0 1 0M1 1 −1 0 1M2 1 −1 J|

(2)求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

| −2 a)| |<0 3 L|

(1)求。》的值;

【答案】

(1) a−A. b 二 5 ;

(2)

p = |<2 −3 −1) 1 0 −1 1 1/|

1 止网 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$a-b = -1$

$2a-b = 3$

【解析】(【)，∽■=> $tr(A) = tr(B)$二>3 +〉 = 1 + 力 + 1

(ID

$A = \begin{vmatrix} < 0 & 2 & -3) \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} <1 & 0 & 0、 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} <-1 & 2 & -3、 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

n < (7 = 4

$b = 5$

$C = \begin{vmatrix} <1 & -2 & 3, \\ r-i & 2 & -3、 \\ -i & 2 & -3 \\ J & -2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} <0 & 0 & b \\ -1 & & \end{vmatrix}$ 、1 −2 (−2 3)

C 的特征值 4=^=0,4=4

人=0 时(0E- $C)x = 0$ 的基础解系为济=(2,1,0″; & = (-3,0,1/ $4 = 5$ 时(4E — C)x = 0 的基础解系为 &3 = (T, T, 1)’

A 的特征值 2^ =1 + 4: 1,15

令 $F = (\&, '' =$ $\begin{vmatrix} 2 & -3 & T) \\ 1 & 0 & -1 \\ 次 & 1 & \end{vmatrix}$

$\therefore P^{J}AP = 1$ $\begin{vmatrix} (1 & \\ & \\ k & 5) \end{vmatrix}$