2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x\to 0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是(　　)

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(\frac{1}{2},1)$　　(D) $(0,\frac{1}{2})$

(2) 下列曲线中有渐近线的是 (　　)

(A) $y=x+\sin x$　　(B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上 (　　)

(A) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　　(B) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(C) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　　(D) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(4) 曲线 $\begin{cases} x=t^2+7 \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是 (　　)

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$　　(C) $10\sqrt{10}$　　(D) $5\sqrt{10}$

(5) 设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$ (　　)

(A) 1　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\ne 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则 (　　)

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

（B） $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得

(7) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

(8) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的 ( )

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

((9) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5} dx =$ __________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$, $x\in[0,2]$，则 $f(7)=$___.

(11) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$ __________.

(12) 曲线 $r=r(\theta)$ 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是

__________.

(13) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\overline{x}=$___.

(14) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围为

________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，若 $f(0)=0, f'(0)=$ ，求 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 的区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$. 证明：

(I) $0\le \int_a^x g(t)dt \le x-a, x\in[a,b]$,

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx$.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}, x\in[0,1]$，定义函数列 $f_1(x)=f(x), f_2(x)=f(f_1(x)), \cdots$, $f_n(x)=f(f_{n-1}(x)), \cdots$，记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围成平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$ 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II) 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵.

(23)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是(　　)

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(\frac{1}{2},1)$　　(D) $(0,\frac{1}{2})$

【答案】B

【解析】由定义 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^{\alpha}(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)^{\alpha}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2^{\alpha}x^{\alpha-1}=0$

所以 $\alpha-1>0$，故 $\alpha>1$.

当 $x\to 0^+$时，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim \dfrac{x^{\frac{2}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$是比 x 的高阶无穷小，所以$\dfrac{2}{\alpha}-1>0$，即$\alpha<2$.

故选 B

(2) 下列曲线中有渐近线的是 ( )

(A) $y=x+\sin x$ (B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ (D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

【答案】C

【解析】关于 C 选项：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}=1+0=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}[x+\sin\dfrac{1}{x}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$存在斜渐近线 $y=x$.

故选 C

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间$[0,1]$上 ( )

(A) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (B) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(C) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (D) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【答案】D

【解析】令 $F(x)=g(x)-f(x)=f(0)(1-x)+f(1)x-f(x)$，则

$$F(0)=F(1)=0,$$

$$F'(x)=-f(0)+f(1)-f'(x),F''(x)=-f''(x).$$

若 $f''(x)\ge 0$，则 $F''(x)\le 0$，$F(x)$在$[0,1]$上为凸的.

又 $F(0)=F(1)=0$，所以当 $x\in[0,1]$时，$F(x)\ge 0$，从而 $g(x)\ge f(x)$.

故选D.

(4) 曲线$\begin{cases}x=t^2+7\\y=t^2+4t+1\end{cases}$上对应于$t=1$的点处的曲率半径是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{100}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

【答案】C

【解析】

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{2t+4}{2t}\right|_{t=1}=3$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\left.\frac{dy'}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{-\frac{2}{t^2}}{2t}\right|_{t=1}=-1$$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1+9)^{\frac{3}{2}}},\therefore R=\frac{1}{k}=10\sqrt{10}$$

故选 C

(5) 设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$ （　　）

(A) 1　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】因为 $\frac{f(x)}{x}=f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}$，所以 $\xi^2=\frac{x-f(x)}{f(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^2f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

故选 D.

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则 （　　）

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得

【答案】A

【解析】记 $A=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, C=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, B\neq 0, A, C$ 相 反 数

则$\Delta = AC-B^2<0$，所以$u(x,y)$ 在 D 内无极值，则极值在边界处取得.

故选 A

(7) 行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$　　(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

【答案】B

【解析】由行列式的展开定理展开第一列

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$

$$=-(ad-bc)^2.$$

(8) 设 a_1, a_2, a_3 均为三维向量，则对任意常数 k, l，向量组 a_1+ka_3，a_2+la_3 线性无关是向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关的 ( )

(A)必要非充分条件　　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分也非必要条件

【答案】A

【解析】$(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$.

$\Leftarrow$) 记 $A=(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3)$，$B=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$. 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无

关，则$r(A)=r(BC)=r(C)=2$，故$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关.

$\Rightarrow$）举反例. 令$\alpha_3=0$，则α_1,α_2线性无关，但此时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$却线性相关.

综上所述，对任意常数k,l，向量$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的必要非充分条件.

故选 A

二、填空题：9□ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$ ________.

【答案】$\frac{3}{8}\pi$

【解析】

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{3}{8}\pi$$

(10) 设$f(x)$是周期为4的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1)$, $x\in[0,2]$，则$f(7)=$___.

【答案】1

【解析】$f'(x)=2(x-1)$, $x\in[0,2]$且为偶函数

则$f'(x)=2(-x-1)$, $x\in[-2,0]$

又$f(x)=-x^2-2x+c$且为奇函数，故$c=0$

$\therefore f(x)=-x^2-2x$, $x\in[-2,0]$

又$\because f(x)$的周期为4，$\therefore$ $f(7)=f(-1)=1$

(11) 设$z=z(x,y)$是由方程$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$确定的函数，则$dz\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$ ________.

【答案】$-\frac{1}{2}(dx+dy)$

【解析】对$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$方程两边同时对$x,y$求偏导

$$\begin{cases} e^{2yz}\cdot 2y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ e^{2yz}(2z+2y\dfrac{\partial z}{\partial y})+2y+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$$

当 $x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$时 ，$z=0$

故 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2},\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2}$

故 $\left.dz\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2}dx+(-\dfrac{1}{2})dy=-\dfrac{1}{2}(dx+dy)$

(12) 曲线$\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$ 的极坐标方程是 $r=\theta$ ，则 L 在点 $(r,\theta)=(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是__________.

【答案】 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$

【解析】由直角坐标和极坐标的关系 $\begin{cases} x=r\cos\theta=\theta\cos\theta \\ y=r\sin\theta=\theta\sin\theta \end{cases}$，

于是 $(r,\theta)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，对应于 $(x,y)=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

切线斜率 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\theta\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$ $\quad\therefore \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}=-\dfrac{2}{\pi}$

所以切线方程为 $y-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{2}{\pi}(x-0)$

即 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$

(13) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间$[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$__.

【答案】 $\dfrac{11}{20}$

【解析】质心横坐标 $\bar{x}=\dfrac{\int_0^1 x\rho(x)\,dx}{\int_0^1 \rho(x)\,dx}$

$$\int_0^1 \rho(x)\,dx=\int_0^1\left(-x^2+2x+1\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_0^1=\frac{5}{3}$$

$$\int_0^1 x\rho(x)\,dx=\int_0^1 x\left(-x^2+2x+1\right)dx=\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{11}{12}$$

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\frac{11}{20}$$

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围 __________.

【答案】$[-2,2]$

【解析】配方法：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_3)^2-a^2x_3^2-(x_2-2x_3)^2+4x_3^2$

由于二次型负惯性指数为 1，所以 $4-a^2\geq 0$，故 $-2\leq a\leq 2$.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

【解析】 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]$$

$$\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2t}=\frac{1}{2}.$$

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

【解析】 由 $x^2+y^2y'=1-y'$，得

$(y^2+1)y'=1-x^2$ ……………………………………………………①

此时上面方程为变量可分离方程，解的通解为

$$\frac{1}{3}y^3+y=x-\frac{1}{3}x^3+c$$

由 $y(2)=0$ 得 $c=\frac{2}{3}$

又由①可得 $y'(x)=\dfrac{1-x^2}{y^2+1}$

当 $y'(x)=0$ 时， $x=\pm1$，且有：

$x<-1,y'(x)<0$

$-1<x<1,y'(x)>0$

$x>1,y'(x)<0$

所以 $y(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值，在 $x=1$ 处取得极大值

$y(-1)=0,y(1)=1$

即：$y(x)$ 的极大值为 1，极小值为 0.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\le x^2+y^2\le4,x\ge0,y\ge0\right\}$，计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

【解析】D 关于 $y=x$ 对称，满足轮换对称性，则：

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$\therefore I=\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D \left[\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}+\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\sin\pi r\cdot r dr$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{\pi}\right)\int_1^2 r d\cos\pi r$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\cos\pi r\cdot r\Big|_1^2-\int_1^2\cos\pi r dr\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\left[2+1-\frac{1}{\pi}\sin\pi r\Big|_1^2\right]$$

$$=-\frac{3}{4}$$

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，若 $f(0)=0, f'(0)=$ ，求 $f(u)$ 的表达式.

【解析】由 $z=f\left(e^x\cos y\right)$，$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)\cdot e^x\cos y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(e^x\cos y)\cdot\left(-e^x\sin y\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)\cdot e^x\cos y\cdot e^x\cos y+f'(e^x\cos y)\cdot e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)\cdot\left(-e^x\sin y\right)\cdot\left(-e^x\sin y\right)+f'(e^x\cos y)\cdot\left(-e^x\cos y\right)$$

由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4z+e^x\cos y\right)e^{2x}$，代入得，

$$f''\left(e^x\cos y\right)\cdot e^{2x}=[4f\left(e^x\cos y\right)+e^x\cos y]e^{2x}$$

即

$$f''\left(e^x\cos y\right)-4f\left(e^x\cos y\right)=e^x\cos y,$$

令 $e^x\cos y=t$，得 $f''(t)-4f(t)=t$

特征方程 $\lambda^2-4=0, \lambda=\pm 2$ 得齐次方程通解 $\bar{y}=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$

设特解 $y^* = at + b$，代入方程得 $a = -\frac{1}{4}, b = 0$，特解 $y^* = -\frac{1}{4}t$

则原方程通解为 $y = f(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - \frac{1}{4}t$

由 $f(0) = 0, f'(0) = 0$，得 $c_1 = \frac{1}{16}, c_2 = -\frac{1}{16}$，则

$$y = f(u) = \frac{1}{16}e^{2u} - \frac{1}{16}e^{-2u} - \frac{1}{4}u.$$

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0 \le g(x) \le 1$，证明：（I）

$0 \le \int_a^x g(t)dt \le x-a, x \in [a,b]$，

（II）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx$.

【解析】（I）由积分中值定理 $\int_a^x g(t)dt = g(\xi)(x-a), \xi \in [a,x]$

$\because$ $0 \le g(x) \le 1$，$\therefore 0 \le g(\xi)(x-a) \le (x-a)$

$\therefore 0 \le \int_a^x g(t)dt \le (x-a)$

（II）直接由$0 \le g(x) \le 1$，得到

$0 \le \int_a^x g(t)dt \le \int_a^x 1dt = (x-a)$

（II）令 $F(u) = \int_a^u f(x)g(x)dx - \int_a^{a+\int_a^u g(t)dt} f(x)dx$

$F'(u) = f(u)g(u) - f\left(a + \int_a^u g(t)dt\right) \cdot g(u)$

$= g(u)\left[f(u) - f\left(a + \int_a^u g(t)dt\right)\right]$

由（I）知$0 \le \int_a^u g(t)dt \le (u-a)$ $\quad\therefore a \le a + \int_a^u g(t)dt \le u$

又由于 $f(x)$ 单增，所以 $f(u) - f\left(a + \int_a^u g(t)dt\right) \ge 0$

$\therefore F'(u) \ge 0, \therefore F(u)$ 单调不减，$\therefore F(u) \ge F(a) = 0$

取$u = b$，得 $F(b) \ge 0$，即（II）成立.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}, x\in[0,1]$，定义函数列

$f_1(x)=f(x), f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$，记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围成平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

【解析】 $f_1(x)=\dfrac{x}{1+x}, f_2(x)=\dfrac{x}{1+2x}, f_3(x)=\dfrac{x}{1+3x},\cdots, f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$,

$$\therefore S_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx=\int_0^1\frac{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{1+nx}dx$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1 1dx-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{1+nx}dx=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+nx)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+n)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} nS_n=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}=1-0=1$$

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$ 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

【解析】因为 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$,所以 $f(x,y)=y^2+2y+\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 为待定函数.

又因为 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$,则 $\varphi(y)=1-(2-y)\ln y$，从而

$f(x,y)=y^2+2y+1-(2-x)\ln x=(y+1)^2-(2-x)\ln x$.

令 $f(x,y)=0$,可得 $(y+1)^2=(2-x)\ln x$，当 $y=-1$ 时，$x=1$ 或 $x=2$，从而所求的体积为

$$V=\pi\int_1^2(y+1)^2dx=\pi\int_1^2(2-x)\ln x\,dx$$

$$=\pi\int_1^2\ln x\,d\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \pi\left[\ln x\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^2 - \pi\int_1^2\left(2-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \pi\, 2\ln 2 - \pi\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2 = \pi\, 2\ln 2 - \pi\cdot\frac{5}{4} = \pi\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right).$$

(22)（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II) 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B .

【解析】

$$(A\mid E)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1\end{pmatrix},$$

(I) $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi=(-1,2,3,1)^T$

(II) $e_1=(1,0,0)^T, e_2=(0,1,0)^T, e_3=(0,0,1)^T$

$Ax=e_1$ 的通解为 $x=k_1\xi+(2,-1,-1,0)^T=(2-k_1,-1+2k_1,-1+3k_1,k_1)^T$

$Ax=e_2$ 的通解为 $x=k_2\xi+(6,-3,-4,0)^T=(6-k_2,-3+2k_2,-4+3k_2,k_2)^T$

$Ax=e_3$ 的通解为 $x=k_3\xi+(-1,1,1,0)^T=(-1-k_3,1+2k_3,1+3k_3,k_3)^T$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3\\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3\\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}\qquad（k_1,k_2,k_3 为任意常数）$$

(23)（本题满分 11 分）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

【解析】已知 $A=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$，

则 A 的特征值为n，0（$n-1$ 重）.

A 属于 $\lambda=n$ 的特征向量为 $(1,1,\cdots,1)^T$；$r(A)=1$，故 $Ax=0$ 基础解系有 $n-1$ 个线性无关的解向量，即 A 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量；故 A 相似于对角阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 n，0（$n-1$ 重），同理 B 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，故 B 相似于对角阵Λ.

由相似关系的传递性，A 相似于 B.