2012 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0
（B）1
（C）2
（D）3

【答案】： C

【解析】： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直的

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$为水平的，没有斜渐近线 故两条选C

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中$n$ 为正整数，则 $f'(0)=$

（A） $(-1)^{n-1}(n-1)!$

（B） $(-1)^{n}(n-1)!$

（C） $(-1)^{n-1}n!$

（D） $(-1)^{n}n!$

【答案】： C

【解析】： $f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(2e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(ne^{nx}-n)$

所以 $f'(0)=(-1)^{n-1}n!$

（3） 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots a_n$，则数列(s_n)有界是数列（a_n）收敛的

(A)充分必要条件. (B)充分非必要条件.

（C）必要非充分条件. （D）即非充分地非必要条件.

【答案】：(B)

（4）设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin x dx(k=1,2,3)$,则有D

（A）$I_1< I_2 <I_3.$ (B) $I_2< I_2< I_3.$

(C) $I_1< I_3 <I_1,$ (D) $I_1< I_2< I_3.$

【答案】：(D)

【解析】：: $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin xdx$ 看为以 k 为自变量的函数，则可知 $I_k'=e^{k^2}\sin k\ge 0,k\in(0,\pi)$，即可知 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin xdx$ 关于 k 在 $(0,\pi)$ 上为单调增函数，又由于 $1,2,3\in(0,\pi)$，则 $I_1<I_2<I_3$，故选D

（5）设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0, f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

(A) $x_1> x_2, y_1< y_2.$ (B) $x_1> x_2, y_1>y_1.$

(C) $x_1< x_2, y_1< y_2.$ (D) $x_1< x_2, y_1> y_2.$

【答案】：(D)

【解析】：$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 表示函数 $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调递增的，关于变量 y 是单调递减的。因此，当 $x_1<x_2, y_1>y_2$ 必有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$，故选D

（6）设区域 D 由曲线 $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1,$ 围成，则 $\iint\left(x^5y-1\right)dxdy=($ $)$

(A) π (B) 2 (C) -2 (D) $-\pi$

【答案】：（D）

【解析】： 由二重积分的区域对称性，

$$\iint\left(x^5y-1\right)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}\left(x^5y-1\right)dy=-\pi$$

（7）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（ ）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【答案】：（C）

【解析】：由于$\left|(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，可知$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关。故选（C）

（8）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$则$Q^{-1}AQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　　　　（B）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　　　　（D）$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

【答案】：（B）

【解析】：$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，

故$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

故选（B）。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________。

【答案】：**1**

【解析】：将 $x=0$ 代入原方程可得 $y=0$

方程 $x^2-y+1=e^y$ 两端对 x 求导，有 $2x-\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$ ， $x=0$、 $y=0$ 代入可得，所以

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$

再次求导得 $2-\frac{d^2y}{dx^2}=e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+e^y\frac{d^2y}{dx^2}$，再将 $x=0$、 $y=0$、 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$ 代入可得

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=1$。

（10） 计算 $\lim\limits_{x\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$___。

【答案】： $\frac{\pi}{4}$

【解析】：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

（11） 设 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$___。

【答案】： 0 .

【解析】： 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$，所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

（12） 微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为_______。

【答案】： $x=y^2$

【解析】： $ydx+(x-3y^2)dy=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=3y-\frac{1}{y}x\Rightarrow\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=3y$ 为一阶线性微分方程，

所以

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left[\int 3y\cdot e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right]=\frac{1}{y}\left[\int 3y^2dy+C\right]=(y^3+C)\frac{1}{y}$$

又因为 $y=1$ 时 $x=1$，解得 $C=0$，故 $x=y^2$.

（13） 曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________。

【答案】：$(-1,0)$

【解析】：将 $y'=2x+1, y''=2$ 代入曲率计算公式，有

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{\left[1+(2x+1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理有 $(2x+1)^2=1$，解得 $x=0$ 或 -1，又 $x<0$，所以 $x=-1$，这时 $y=0$，

故该点坐标为 $(-1,0)$

（14） 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则

$|BA^*|=$________。

【答案】：**-27**

【解析】：由于 $B=E_{12}A$，故 $BA^*=E_{12}A\cdot A^*=|A|E_{12}=3E_{12}$，

所以，$|BA^*|=|3E_{12}|=3^3|E_{12}|=27*(-1)=-27$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$

（1） 求 a 的值

（2） 若当 $x\to0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k

【解析】：（1） $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}+1)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}+1=1$，即 $a=1$

（2），当 $x\to0$ 时，由 $f(x)-a=f(x)-1=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$

又因为,当 $x\to0$ 时，$x-\sin x$ 与 $\frac{1}{6}x^3$ 等价，故 $f(x)-a\sim\frac{1}{6}x$，即 $k=1$

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=xe-\frac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

【解析】：$f(x,y)=xe-\dfrac{x^2+y^2}{2}$，

先求函数的驻点. $f_x'(x,y)=e-x=0, f_y'(x,y)=-y=0$，解得函数为驻点为$(e,0)$.

又$A=f_{xx}''(e,0)=-1, B=f_{xy}''(e,0)=0, C=f_{yy}''(e,0)=-1$，

所以$B^2-AC<0, A<0$，故$f(x,y)$在点$(e,0)$处取得极大值$f(e,0)=\dfrac{1}{2}e^2$.

（17）（本题满分 10 分）

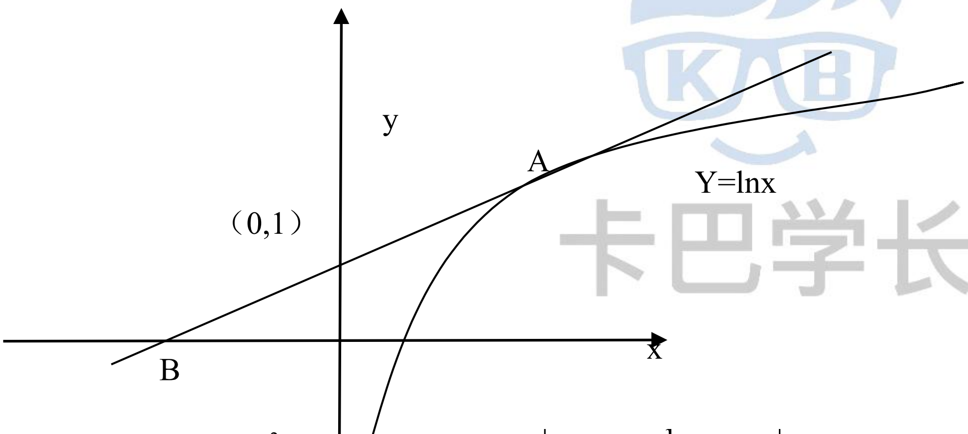
过点（0，1）点作曲线 L： $y=\ln x$ 的切线，切点为A，又 L 与 x 轴交于B 点，区域D 由 L 与直线AB 及 x 轴围成，求区域 D 的面积及 D 绕x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

【解析】：

设切点坐标为$A(x_0,\ln x_0)$，斜率为$\dfrac{1}{x_0}$，所以设切线方程为$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，又因为该切线过

$B(0,1)$，所以$x_0=e^2$，故切线方程为：$y=\dfrac{1}{e^2}x+1$

切线与x轴交点为$B(-e^2,0)$



（1）$A=\int_0^2\left[e^y-e^2(y-1)\right]dy=\left[e^y-e^2\left(\dfrac{1}{2}y^2-y\right)\right]_0^2=e^2-1$

（2）

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot\left[e^2-\left(-e^2\right)\right]-\pi\int_1^{e^2}\ln^2 x\,dx$$

$$=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[\left(x\ln^2 x\right)_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\ln x\,dx\right]$$

$$=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[4e^2-\left(2x\ln x\right)_1^{e^2}+\int_1^{e^2}2dx\right]$$

$$=\frac{8}{3}\pi e^2-2\pi\left(e^2-1\right)=\frac{2}{3}\pi\left(e^2+3\right)$$

（18）（本题满分 10 分）

计算二重积分$\iint\limits_D xyd\sigma$，其中区域 D 为曲线$r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$与极轴围成。

【解析】：

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xyd\sigma &= \int_0^{\pi} d\theta\int_0^{1+\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr\\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4 d\theta\\ &= 16\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cos^8\frac{\theta}{2}d\frac{\theta}{2}\\ &= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^{11}tdt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^9 tdt\\ &= \frac{8}{3}-\frac{8}{5}\\ &= \frac{16}{15}\end{aligned}$$

（19）（本题满分 11 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$

1）求表达式 $f(x)$

2）求曲线的拐点 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$

【解析】：

1）特征方程为$r^2+r-2=0$，特征根为$r_1=1,r_2=-2$，齐次微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.再由 $f'(x)+f(x)=2e^x$ 得$2C_1e^x-C_2e^{-2x}=2e^x$，可知$C_1=1, C_2=0$。

故 $f(x)=e^x$

2）曲线方程为 $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，则 $y'=1+2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，$y''=2x+2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

令 $y''=0$ 得 $x=0$。为了说明 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解，我们来讨论 y'' 在 $x>0$ 和 $x<0$ 时的符号。

当 $x>0$ 时，$2x>0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt>0$，可知 $y''>0$；当 $x<0$ 时，$2x<0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt<0$，可知 $y''<0$。可知 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解。

同时，由上述讨论可知曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在 $x=0$ 左右两边的凹凸性相反，可知$(0,0)$点是曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 唯一的拐点。

（20）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

【解析】：令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，可得

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\bullet\frac{2}{(1-x)^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x$$

当 $0<x<1$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\ge 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\ge 0$，

故 $f'(x)\ge 0$，而 $f(0)=0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0$

所以 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge\frac{x^2}{2}+1$。

当 $-1<x<0$，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\le 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\le 0$，

故 $f'(x)\ge 0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0$

可知，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

（21）（本题满分 11 分）

（1） 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\ldots+x=1(n>1\text{的整数})$，在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（2） 记（1）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

【解析】：(1) 由题意得：令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $f(1)>0$，再由 $f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}-1=-(\frac{1}{2})^n<0$，由零点定理得在 $(\frac{1}{2},1)$ 肯定有解 x_0，假设在此区间还有另外一根 x_1，

所以 $x_0^n+x_0^{n-1}+\cdots+x_0-1=x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1$，由归纳法得到 $x_1=x_0$，即唯一性得证

（2）假设根为 x_n，即 $f(x_n)=x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，所以 $f(x_n)=\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}-1=0,(\dfrac{1}{2}<x_n<1)$，

由于 $x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+\cdots+x_{n+1}-1=0$，可知 $x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}-1<0$，由于 $x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，可知 $x_{n+1}<x_n$。又由于 $\dfrac{1}{2}<x_n<1$，也即 $\{x_n\}$ 是单调的。则由单调有界收敛定理可知 $\{x_n\}$ 收敛，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，可知 $a<x_2<x_1=1$。

当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}-1=\dfrac{a}{1-a}-1=0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=b$ 的通解。

【解析】：（Ⅰ）$\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ）$\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有 $1-a^4=0$ 及 $-a-a^2=0$，可知 $a=-1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，进一步化为行最简形得$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，故其通解为$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，有$|A|=0$.

即： $|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得$\lambda=1$ 或-1.

当$\lambda=1$时，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}$，显然不符，故$\lambda=-1$.

（23）（本题满分 11 分）三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，$A^T$ 为矩阵 A 的转置，已知$r(A^TA)=2$，且二次型 $f=x^TA^TAx$ 。

1）求a

2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

【解析】：1）由$r(A^TA)=r(A)=2$ 可得，

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{vmatrix}=a+1=0\Rightarrow a=-1$$

2）$f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

则矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

解得 B 矩阵的特征值为： $\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于$\lambda_1=0$,解$(\lambda_1 E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于$\lambda_2=2$,解$(\lambda_2 E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于$\lambda_3=6$,解$(\lambda_3 E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将η_1,η_2,η_3单位化可得：

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$