2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为（ ）

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

(2) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（ ）

(A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$. (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$.

(C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$. (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$.

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点 $(0,0)$（ ）

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点. (B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点. (C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点. (D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$（ ）

(A) $\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$. (B) $\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$.

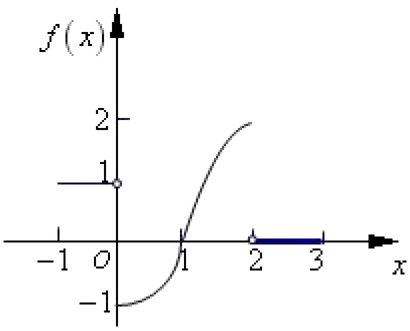
(C) $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$. (D) $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$.

(5) 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内（ ）

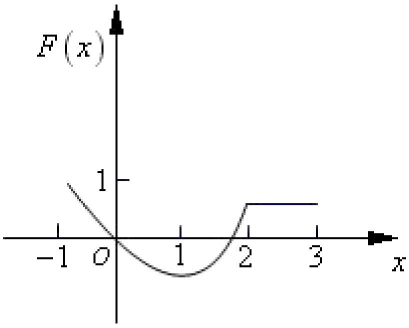
(A) 有极值点，无零点. (B) 无极值点，有零点.

(C) 有极值点，有零点. (D) 无极值点，无零点.

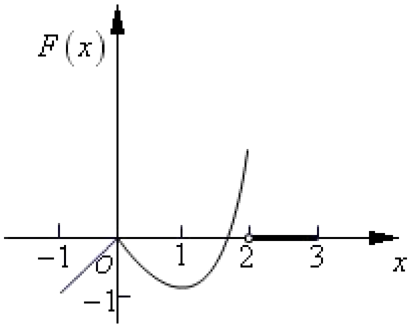
(6) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



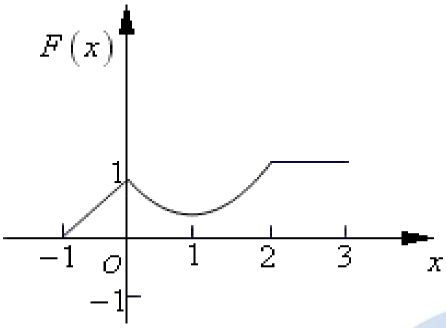
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 的图形为（ ）



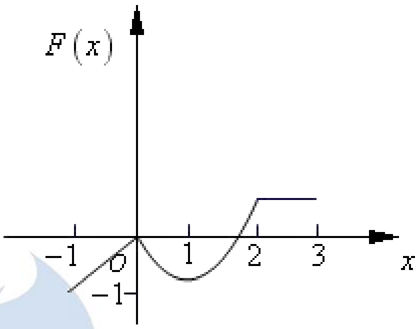
(A)



(B)



(C)



(D)

(7) 设 A, B 均为 2 阶矩阵，A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵，若 $|A|=2, |B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（ ）

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

(8) 设 A, P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为（ ）

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $\begin{cases}x=\int_0^{1-t}e^{-u^2}du,\\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ....

(10) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=1$，则 $k=$ ....

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=$ ....

(12) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$ =_.

(13) 函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为 ....

(14) 设 α,β 为 3 维列向量，$\beta^{\mathrm T}$ 为 β 的转置，若矩阵 $\alpha\beta^{\mathrm T}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\beta^{\mathrm T}\alpha$=

______________.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx\ (x>0)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 dz 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(18)(本题满分 10 分)

设非负函数 $y=y(x)\ (x\ge0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$. 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体

积.

(19)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$.

(20)(本题满分 12 分)

设 $y=y(x)$ 是区间$(-\pi,\pi)$内过点$\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$的光滑曲线, 当$-\pi<x<0$时, 曲线上任一点处的法线都过原点；当$0\le x<\pi$时, 函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求函数 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在(a,b)可导, 则存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在$(0,\delta)(\delta>0)$内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$存在, 且 $f'_+(0)=A$.

(22)(本题满分 11 分)

设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\quad \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

(Ⅰ)求满足 $A\xi_2=\xi_1$, $A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量ξ_2,ξ_3；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量ξ_2,ξ_3，证明： ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

(Ⅰ)求二次型 f的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型 f的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函 数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin nx}$ 的可去间断点的个数为（　）

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 无穷多个.

【答案】C

【解析】

$$f(x)=\frac{x-x^3}{\sin \pi x}$$

则当 x 取任何整数时，$f(x)$ 均无意义

故 $f(x)$ 的间断点有无穷多个，但可去间断点为极限存在的点，故应是 $x-x^3=0$ 的解

$$x_{1,2,3}=0,\pm 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to -1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

故可去间断点为 3 个，即$0,\pm 1$

（2）当$x\to 0$时，$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则（　）

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.　(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

【答案】A

【解析】 $f(x)=x-\sin ax,\ g(x)=x^2 ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-\dfrac{6b}{a}\cdot ax}=-\frac{a^3}{6b}=1\qquad \therefore a^3=-6b\quad 故排除\ B,C.$$

另外$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$存在，蕴含了$1-a\cos ax\to 0\ (x\to 0)$故$a=1$. 排除 D.
所以本题选 A.

（3） 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为$dz=xdx+ydy$，则点$(0,0)$ （ ）

(A)不是$f(x,y)$的连续点. (B)不是$f(x,y)$的极值点.

(C)是$f(x,y)$的极大值点. (D)是$f(x,y)$的极小值点.

【答案】 D

【解析】因$dz=xdx+ydy$ 可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=y$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$$

又在（0，0）处，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$$AC-B^2=1>0$$

故（0，0）为函数 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点.

（4） 设函数$f(x,y)$连续，则$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)\,dx=$（ ）

$(A)\ \int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$. $(B)\ \int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$.

$(C)\ \int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$. (D). $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

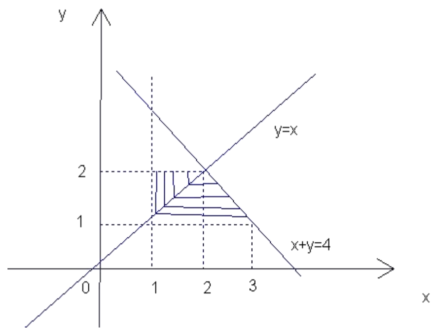
【答案】C

【解析】$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_x^2 f(x,y)dx$ 的积分区域为两部分：

$D_1=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2, x\le y\le 2\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\middle| 1\le y\le 2, y\le x\le 4-y\right\}$

将其写成一块 $D=\left\{(x,y)\middle| 1\le y\le 2, 1\le x\le 4-y\right\}$

故二重积分可以表示为$\int_1^2 dy\int^{4-y} f(x,y)dx$，故答案为C.



（5） 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内（ ）

(A) 有极值点，无零点. (B) 无极值点，有零点.

(C) 有极值点，有零点. (D) 无极值点，无零点.

【答案】 B

【解析】由题意可知，$f(x)$ 是一个凸函数，即 $f''(x)<0$，且在点 $(1,1)$ 处的曲率

$\rho=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $f'(1)=-1$，由此可得，$f''(1)=-2$

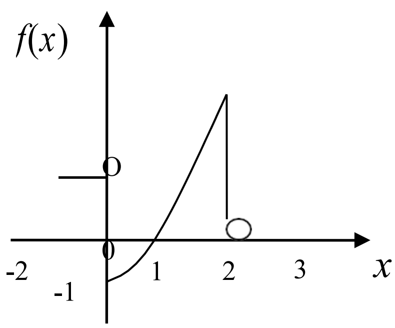
在 $[1,2]$ 上，$f'(x)\le f'(1)=-1<0$，即 $f(x)$ 单调减少，没有极值点.

对于 $f(2)-f(1)=f'(\zeta)<-1$，$\zeta\in(1,2)$，（拉格朗日中值定理）

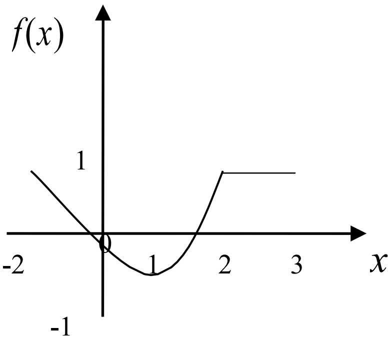
$\therefore f(2)<0$ 而 $f(1)=1>0$

由零点定理知，在 $[1,2]$ 上，$f(x)$ 有零点. 故应选（B）.

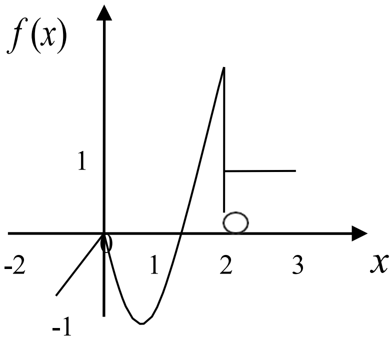
（6） 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



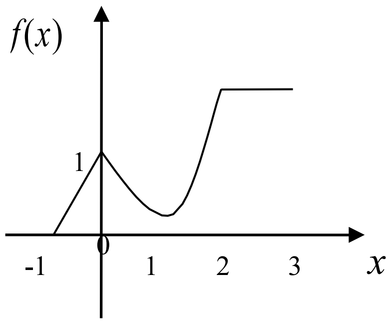
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 的图形为（ ）



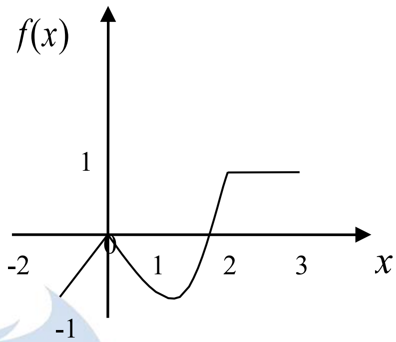
(A).



(B).



(C).



(D).

【答案】D

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y=f(x)$ 的图形可见，其图像与 x 轴及 y 轴、$x=x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$，从而可得出几个方面的特征：

① $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\le 0$，且单调递减.

② $x\in[1,2]$时，$F(x)$ 单调递增.

③ $x\in[2,3]$ 时，$F(x)$ 为常函数.

④ $x\in[-1,0]$ 时，$F(x)\le 0$ 为线性函数，单调递增.

⑤由于 F(x)为连续函数

结合这些特点，可见正确选项为 D.

（7） 设A，B 均为 2 阶矩阵，A^*，B^*分别为A，B 的伴随矩阵.若 $|A|=2, |B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的伴随矩阵为（ ）

$(A).\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$ $(B).\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

$(C).\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　　　$(D).\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

【答案】 B

【解析】根据 $CC^*=|C|E$ 若 $C^*=|C|C^{-1}$，$C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|A||B|=2\times3=6$ 即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

（8）设 A，P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为（　）

$(A).\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　$(B).\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(C).\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　$(D).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

【答案】 A

【解析】$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)E_{12}(1)$，即：

$$Q = PE_{12}(1)$$
$$Q^T AQ = [PE_{12}(1)]^T A[PE_{12}(1)] = E_{12}^T(1)[P^T AP]E_{12}(1)$$
$$= E_{21}^T(1)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}E_{12}(1)$$
$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9） 曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du \\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$ 在（0，0）处的切线方程为____________.

【答案】 $y=2x$

【解析】 $\dfrac{dy}{dt}=2t\ln(2-t^2)-t^2\cdot\dfrac{2t}{2-t^2}\Big|_{t=1}=-2$

$\dfrac{dx}{dt}=e^{-(1-t)^2}\cdot(-1)\Big|_{t=1}=-1$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=2$

所以 切线方程为 $y=2x$.

（10） 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|kx|}dx=1$,则 k =____.

【答案】-2

【解析】 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|kx|}dx=2\int_0^{+\infty}e^{kx}dx=2\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{k}e^{kx}\Big|_0^b$

因为极限存在所以$k<0$

$1=0-\dfrac{2}{k}$

$k=-2$

（11） $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=$____________.

【答案】0

【解析】令 $I_n=\int e^{-x}\sin nxdx=-e^{-x}\sin nx+n\int e^{-x}\cos nxdx$

$=-e^{-x}\sin nx-ne^{-x}\cos nx-n^2I_n$

所以 $I_n=-\dfrac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}+C$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=\lim\limits_{n\to\infty}(-\dfrac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}\Big|_0^1)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(-\dfrac{n\cos n+\sin n}{n^2+1}e^{-1}+\dfrac{n}{n^2+1})$

$=0$

（12）设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^{y}=x+1$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=$___.

【答案】-3

【解析】对方程 $xy+e^y=x+1$ 两边关于 x 求导有 $y+xy'+y'e^y=1$，得 $y'=\dfrac{1-y}{x+e^y}$

对 $y+xy'+y'e^y=1$ 再次求导可得 $2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0$，

得 $y''=-\dfrac{2y'+(y')^2e^y}{x+e^y}$ (*)

当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'_{(0)}=\dfrac{1-0}{e^0}=1$，代入(*)得

$y''(0)=-\dfrac{2y'(0)+(y'(0))^2e^0}{(0+e^0)^3}=-(2+1)=-3$

（13）函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为_______.

【答案】$e^{-\frac{2}{e}}$

【解析】因为 $y'=x^{2x}(2\ln x+2)$，令 $y'=0$ 得驻点为 $x=\dfrac{1}{e}$.

又 $y''=x^{2x}(2\ln x+2)^2+x^{2x}\cdot\dfrac{2}{x}$，得 $y''\left(\dfrac{1}{e}\right)=2e^{-\frac{2}{e}+1}>0$，

故 $x=\dfrac{1}{e}$ 为 $y=x^{2x}$ 的极小值点，此时 $y=e^{-\frac{2}{e}}$，

又当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$y'(x)<0$；$x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right]$ 时，$y'(x)>0$，故 y 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上递减，在 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 上递增.

而 $y(1)=1$，$y_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{2x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-2x)}=1$，

所以 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为 $y\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$.

(14) 设 α，β 为 3 维列向量，β^{T} 为 β 的转置，若矩阵 $\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则

$\beta^{\mathrm{T}}\alpha=$________.

【答案】2

【解析】因为 $\alpha\beta^{T}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到 $\alpha\beta^{T}$ 得特征值

是 $2, 0, 0$ 而 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha$ 是一个常数，是矩阵 $\alpha\beta^{T}$ 的对角元素之和，则 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=2+0+0=2$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}$

（16）（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx \quad (x>0)$.

【解析】

令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$ 得 $x=\frac{1}{t^2-1}, dx=\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$

$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx=\int\ln(1+t)d\frac{1}{t^2-1}$

$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t+1}dt$

而

$$\int \frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t+1}dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+2\frac{1}{t+1}+C$$

所以

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+C$$

（17）（本题满分 10 分）

设 $z=f\left(x+y,x-y,xy\right)$，其中 f 具有 2 阶连续偏导数，求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$$

$$\therefore\ dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$=(f_1'+f_2'+yf_3')dx+(f_1'-f_2'+xf_3')dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot1+f_{12}''\cdot(-1)+f_{13}''\cdot x+f_{21}''\cdot1+f_{22}''\cdot(-1)+f_{23}''\cdot x+f_3'+y\left[f_{31}''\cdot1+f_{32}''\cdot(-1)+f_{33}''\cdot x\right]$$

$$=f_3'+f_{11}''-f_{22}''+xyf_{33}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''$$

（18）（本题满分 10 分）设非负函数 $y=y\left(x\right)\left(x\geq0\right)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲线 $y=y\left(x\right)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

【解析】

解微分方程 $xy''-y'+2=0$ 得其通解 $y=C_1+2x+C_2x^2$,其中 C_1，C_2 为任意常数

又因为 $y=y(x)$ 通过原点时与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域的面积为 2，于是可得

$C_1=0$

$$2=\int_0^1 y(x)dx=\int_0^1(2x+C_2x^2)dx=\left(x^2+\frac{C_2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=1+\frac{C_2}{3}$$

从而$C_2=3$

于是，所求非负函数 $y=2x+3x^2(x\geq 0)$

又由 $y=2x+3x^2$ 可得，在第一象限曲线 $y=f(x)$ 表示为 $x=\frac{1}{3}(\sqrt{1+3y}-1)$

于是D 围绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为$V=5\pi-V_1$，其中

$$V_1=\int_0^5\pi x^2dy=\int_0^5\pi\cdot\frac{1}{9}(\sqrt{1+3y}-1)^2dy$$

$$=\frac{\pi}{9}\int_0^5(2+3y-2\sqrt{1+3y})dy$$

$$=\frac{39}{18}\pi$$

$$V=5\pi-\frac{39}{18}\pi=\frac{51}{18}\pi=\frac{17}{6}\pi.$$

（19）（本题满分 10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2, y\geq x\right\}$.

【解析】由$(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2$ 得$r\leq 2(\sin\theta+\cos\theta)$，

$$\therefore\iint\limits_D(x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot r^3\Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)^3d(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=-\frac{8}{3}.$$

（20）（本题满分 12 分）

设 $y=y(x)$ 是区间（-π，π）内过点（-$\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}$）的光滑曲线，当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点，当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$.求 $y(x)$ 的表达式.

【解析】由题意，当 $-\pi<x<0$ 时， $y=-\frac{x}{y'}$，即 $ydy=-xdx$，得 $y^2=-x^2+c$，

又 $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 代入 $y^2=-x^2+c$ 得 $c=\pi^2$ ，从而有 $x^2+y^2=\pi^2$

当 $0\le x<\pi$ 时， $y''+y+x=0$ 得 $y''+y=0$ 的通解为 $y^*=c_1\cos x+c_2\sin x$

令解为 $y_1=Ax+b$，则有 $0+Ax+b+x=0$，得 $A=-1,b=0$，

故 $y_1=-x$，得 $y''+y+x=0$ 的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-x$

由于 $y=y(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 内的光滑曲线，故 y 在 $x=0$ 处连续

于是由 $y(0-)=\pm\pi$ ，$y(0+)=c_1$ ，故 $c_1=\pm\pi$ 时， $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处连续

又当 $-\pi<x<0$ 时，有 $2x+2y\cdot y'=0$，得 $y_-'(0)=-\frac{x}{y}=0$，

当 $0\le x<\pi$ 时，有 $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x-1$，得 $y_+'(0)=c_2-1$

由 $y_-'(0)=y_+'(0)$ 得 $c_2-1=0$，即 $c_2=1$

故 $y=y(x)$ 的表达式为 $y=\begin{cases}-\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ -\pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 或

$y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，又过点$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$.

（21）（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

【解析】（Ⅰ）作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，易验证 $\varphi(x)$ 满足：$\varphi(a)=\varphi(b)$；$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

根据罗尔定理，可得在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\therefore f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

（Ⅱ）任取 $x_0\in(0,\delta)$，则函数 $f(x)$ 满足：

在闭区间 $[0,x_0]$ 上连续，开区间 $(0,x_0)$ 内可导，从而有拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi_{x_0}\in(0,x_0)\subset(0,\delta)$，使得 $f'(\xi_{x_0})=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}$ ……(*)

又由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，对上式（*式）两边取 $x_0\to0^+$ 时的极限可得：

$$f_+'(0)=\lim_{x_0\to0^+}\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\lim_{x_0\to0^+}f'(\xi_{x_0})=\lim_{\xi_{x_0}\to0^+}f'(\xi_{x_0})=A$$

故 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

（22）（本题满分 11 分设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求满足 $A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任一向量 ξ_2,ξ_3，证明： ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

【解析】（Ⅰ）解方程 $A\xi_2=\xi_1$

$$(A,\xi_1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$ 故有一个自由变量，令 $x_3=2$，由 $Ax=0$ 解得， $x_2=-1, x_1=1$

求特解，令 $x_1=x_2=0$，得 $x_3=1$

故 $\xi_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1 为任意常数

解方程 $A^2\xi_3=\xi_1$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$$

$$(A^2,\xi_1)=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故有两个自由变量，令 $x_2=-1$，由 $A^2x=0$ 得 $x_1=1, x_3=0$

求特解 $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ 故 $\xi_3=k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，其中 k_2 为任意常数.

（Ⅱ）证明：

由于 $\begin{vmatrix} -1 & k_1 & k_2+\frac{1}{2} \\ 1 & -k_1 & -k_2 \\ -2 & 2k_1+1 & 0 \end{vmatrix} = 2k_1k_2+(2k_1+1)(k_2+\frac{1}{2})-2k_1(k_2+\frac{1}{2})-k_2(2k_1+1)$

$=\frac{1}{2}\neq 0$ 故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

（23）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

【解析】（Ⅰ） $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=(\lambda-a)\begin{vmatrix} \lambda-a & 1 \\ 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \lambda-a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-1]-[0+(\lambda-a)]$

$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-2]$

$=(\lambda-a)[\lambda^2-2a\lambda+\lambda+a^2-a-2]$

$=(\lambda-a)\{[a\lambda+\frac{1}{2}(1-2a)]^2-\frac{9}{4}\}$

$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1)$

$\therefore \lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$

（Ⅱ） 若规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0.则

1) 若 $\lambda_1=a=0$，则 $\lambda_2=-2<0$ ，$\lambda_3=1$ ，不符题意

2) 若 $\lambda_2=0$ ，即 $a=2$，则 $\lambda_1=2>0$，$\lambda_3=3>0$，符合

3) 若 $\lambda_3=0$ ，即 $a=-1$，则 $\lambda_1=-1<0$ ，$\lambda_2=-3<0$，不符题意

综上所述，故 $a=2$.