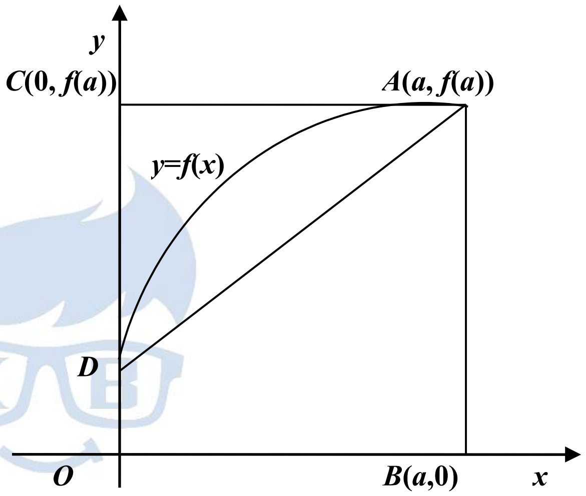
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，求 $f'(x)$ 的零点个数(　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2) 如图，曲线段方程为 $y=f(x)$，函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 等于(　)



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 面积.

(C) 曲边三角形 ACD 面积.

(D) 三角形 ACD 面积.

(3) 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数)为通解的是(　)

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 判断函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{|x-1|}\sin x(x>0)$ 间断点的情况(　)

(A) 有 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

(B) 有 1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点

(C) 有两个无穷间断点

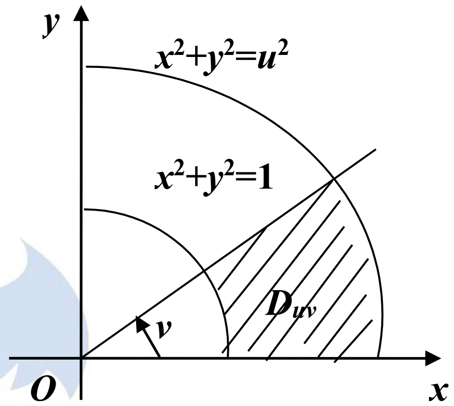
(D) 有两个跳跃间断点

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

(6) 设函数 f 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\frac{\partial F}{\partial u}=$(　　)



(A) $vf(u^2)$

(B) $\frac{v}{u}f(u^2)$

(C) $vf(u)$

(D) $\frac{v}{u}f(u)$

(7) 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=O$，则(　　)

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

(8) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$ ________

(10) 微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$ ________

(11) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

(12) 求函数 $f(x)=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点____________.

(13) 已知 $z=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________.

(14) 矩阵 A 的特征值是 $\lambda,2,3$，其中 λ 未知，且 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$______.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$ 确定，其中 $x(t)$ 是初值问题

$\begin{cases} \frac{dx}{dt}-2te^{-x}=0 \\ x|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(17)(本题满分 9 分)

计算 $\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(18)(本题满分 11 分)

计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$,其中 $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$. 对于任意的 $t\in[0,+\infty)$，直线 $x=0,x=t$，曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成曲边梯形绕 x 轴旋转一周生

成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$；

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足，$\varphi(2)>\varphi(1),\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

(21)(本题满分 11 分)

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大和最小值.

(22)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & a^2 & 2a & \end{pmatrix}_{n\times n},\quad x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

(I) 证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$

(II) 当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1

(III) 当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解

(23)(本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

(I) 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(II) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题

(1)【答案】 D

【详解】因为 $f(0)=f(1)=f(2)=0$，由罗尔定理知至少有 $\xi_1\in(0,1)$， $\xi_2\in(1,2)$ 使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，所以 $f'(x)$ 至少有两个零点. 由于 $f'(x)$ 是三次多项式，三次方程 $f'(x)=0$ 的实根不是三个就是一个，故 D 正确.

(2)【答案】C

【详解】 $\int_0^a xf'(x)dx=\int_0^a xdf(x)=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)dx=af(a)-\int_0^a f(x)dx$

其中 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 面积，$\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形 $ABOD$ 的面积，所以 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形的面积.

(3)【答案】 D

【详解】由微分方程的通解中含有 e^x 、 $\cos 2x$ 、 $\sin 2x$ 知齐次线性方程所对应的特征方程有根 $r=1,r=\pm 2i$，所以特征方程为 $(r-1)(r-2i)(r+2i)=0$，即 $r^3-r^2+4r-4=0$. 故以已知函数为通解的微分方程是 $y'''-y''+4y'-4=0$

(4) 【答案】 A

【详解】 $x=0,x=1$ 时 $f(x)$ 无定义，故 $x=0,x=1$ 是函数的间断点

因为 $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|x-1|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\csc x\cot x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x}=0$$

同理 $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

又 $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1^+}\sin x=\left(\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}\right)\sin 1=\sin 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}\cdot\lim_{x\to 1^+}\sin x=-\sin 1$$

所以 $x=0$ 是可去间断点，$x=1$ 是跳跃间断点.

(5)【答案】 B

【详解】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，且 $\{x_n\}$ 单调. 所以 $\{f(x_n)\}$ 单调且有界. 故 $\{f(x_n)\}$ 一定存在极限.

(6)【答案】 A

【详解】用极坐标得 $$F(u,v)=\iint_D \frac{f\left(u^2+v^2\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}dudv=\int_0^v dv\int_1^u \frac{f(r^2)}{r}rdr=v\int_1^u f(r^2)dr$$

所以 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=vf\left(u^2\right)$

(7) 【答案】C

【详解】$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$， $(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$

故 $E-A,E+A$ 均可逆.

(8) 【答案】 D

【详解】记 $D=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$，

则 $|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4$，又 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4$

所以 A 和 D 有相同的特征多项式，所以 A 和 D 有相同的特征值.
又 A 和 D 为同阶实对称矩阵，所以 A 和 D 相似. 由于实对称矩阵相似必合同，故 D 正确.

二、填空题

(9)【答案】2

【详解】$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2[xf(x)/2]}{x^2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2[xf(x)/2]\cdot f(x)}{[xf(x)/2]^2\cdot4}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2}f(0)=1$$

所以 $f(0)=2$

(10)【答案】 $x(-e^{-x}+C)$

【详解】微分方程 $\left(y+x^2e^{-x}\right)dx-xdy=0$ 可变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=xe^{-x}$

$$\int\frac{1}{x}dx\left[\quad - \quad -\int\frac{1}{x}dx \quad\right]\left(\quad - \quad \frac{1}{x}\quad\right) \quad -$$

(11)【答案】 $y=x+1$

【详解】设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{y\cos(xy)-\frac{1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\frac{1}{y-x}}$，

将 $y(0)=1$ 代入得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$，所以切线方程为 $y-1=x-0$，即 $y=x+1$

(12)【答案】$(-1,-6)$

【详解】 $y=x^{5/3}-5x^{2/3}\Rightarrow y'=\frac{5}{3}x^{2/3}-\frac{10}{3}x^{-1/3}=\frac{10(x+2)}{3x^{1/3}}$

$$\Rightarrow y''=\frac{10}{9}x^{-1/3}+\frac{10}{9}x^{-4/3}=\frac{10(x+1)}{9x^{4/3}}$$

$x=-1$ 时， $y''=0$； $x=0$ 时， y'' 不存在

在 $x=-1$ 左右近旁 y'' 异号，在 $x=0$ 左右近旁 $y''>0$，且 $y(-1)=-6$

故曲线的拐点为$(-1,-6)$

(13)【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$

【详解】设$u=\frac{y}{x}, v=\frac{x}{y}$, 则 $z=u^v$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}(-\frac{y}{x^2})+u^v\ln u\cdot\frac{1}{y}$

$$=u^v\left(-\frac{vy}{ux^2}+\frac{\ln u}{y}\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\left(-1+\ln\frac{y}{x}\right)$$

所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$

(14) 【答案】-1

【详解】$\because\ |A|=2\times3\times\lambda=6\lambda \qquad |2A|=2^3|A|$

$\therefore\ 2^3\times6\lambda=-48 \qquad \Rightarrow \lambda=-1$

三、解答题

(15) 【详解】

方法一： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

方法二： $\because\ \sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3) \qquad \sin(\sin x)=\sin x-\dfrac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\left[\dfrac{\sin^4 x}{x^4}+\dfrac{o(\sin^4 x)}{x^4}\right]=\dfrac{1}{6}$

(16) 【详解】

方法一： 由 $\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$ 得 $e^x dx=2tdt$，积分并由条件 $x\big|_{t=0}$ 得 $e^x=1+t^2$，即 $x=\ln(1+t^2)$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\ln(1+t^2)\cdot2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{\frac{d}{dt}[(1+t^2)\ln(1+t^2)]}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}$

$=(1+t^2)[\ln(1+t^2)+1]$

方法二： 由 $\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$ 得 $e^x dx=2tdt$，积分并由条件 $x\big|_{t=0}$ 得 $e^x=1+t^2$，即 $x=\ln(1+t^2)$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\ln(1+t^2)\cdot2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)=e^x x$

所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^x(x+1)$

(17)【详解】

方法一：由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，故 $\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 是反常积分.

令 $\arcsin x=t$，有 $x=\sin t$，$t\in[0,\pi/2)$

$$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin^2 t}{\cos t}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{2}-\frac{t\cos2t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,d\sin 2t=\frac{\pi^2}{16}-\frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$$

方法二：$\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2\,d(\arcsin x)^2$

$$=\frac{1}{2}x^2(\arcsin x)^2\Big|_0^1-\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx=\frac{\pi^2}{8}-\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx$$

令 $\arcsin x=t$，有 $x=\sin t$，$t\in[0,\pi/2)$

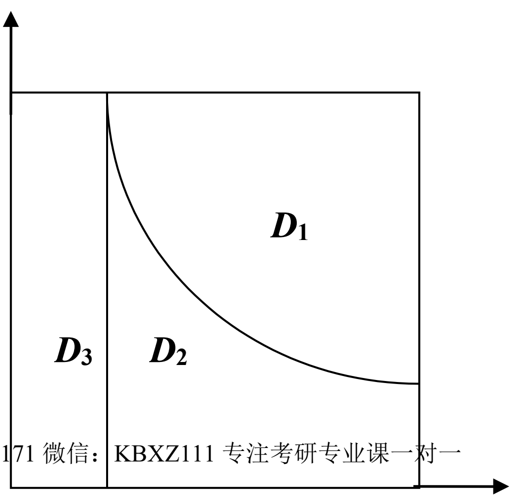
$$\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sin 2t\,dt=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\,d\cos 2t$$

$$=-\frac{1}{4}(t^2\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos 2t\,dt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$$

故，原式 $=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{1}{4}$

(18)【详解】 曲线 $xy=1$ 将区域分成两个区域 D_1 和 D_2+D_3，为了便于计算继续对区域分割，最后为

$$\iint\limits_D \max(xy,1)\,dxdy$$



$$= \iint\limits_{D_1} xydxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy + \iint\limits_{D_3} dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^2 1dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_0^{\frac{1}{x}} 1dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 xydy$$

$$= 1 + 2\ln 2 + \frac{15}{4} - \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2$$

(19)【详解】旋转体的体积 $V = \pi\int_0^t f^2(x)dx$，侧面积 $S = 2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$，由题设条件知

$$\int_0^t f^2(x)dx = \int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

上式两端对 t 求导得 $\quad f^2(t) = f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}$， 即 $\quad y' = \sqrt{y^2-1}$

由分离变量法解得 $\quad \ln(y+\sqrt{y^2-1}) = t + C_1$， 即 $\quad y+\sqrt{y^2-1} = Ce^t$

将 $y(0)=1$ 代入知 $C=1$，故 $y+\sqrt{y^2-1} = e^t$， $y = \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

于是所求函数为 $\qquad y = f(x) = \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

(20)【详解】(I) 设 M 与 m 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，即

$$m \le f(x) \le M \qquad x\in[a,b]$$

由定积分性质，有 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$，即 $\quad m \le \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$

由连续函数介值定理，至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\quad f(\eta) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

即
$$\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$$

(II) 由(I)的结论可知至少存在一点 $\eta\in[2,3]$，使 $\int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)(3-2) = \varphi(\eta)$

又由 $\quad \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)$， 知 $\quad 2 < \eta \le 3$

对 $\varphi(x)$ 在 $[1,2][2,\eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到 $\varphi(1)<\varphi(2)$，$\varphi(\eta)<\varphi(2)$ 得

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1} > 0 \qquad 1<\xi_1<2$$

$$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0 \qquad 2<\xi_1<\eta\le 3$$

在$[\xi_1,\xi_2]$上对导函数$\varphi'(x)$应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0 \qquad \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$$

(21) 【详解】

方法一：作拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$

令 $\begin{cases} F_x'=2x+2\lambda x+\mu=0 \\ F_y'=2y+2\lambda y+\mu=0 \\ F_z'=2z-\lambda+\mu=0 \\ F_\lambda'=x^2+y^2-z=0 \\ F_\mu'=x+y+z-4=0 \end{cases}$

解方程组得$(x_1,y_1,z_1)=(1,1,2),(x_2,y_2,z_2)=(-2,-2,8)$

故所求的最大值为 72，最小值为 6.

方法二：问题可转化为求$u=x^2+y^2+x^4+2x^2y^2+y^4$在 $x+y+x^2+y^2=4$ 条件下的最值

设 $F(x,y,\lambda)=u=x^4+y^4+2x^2y^2+x^2+y^2+\lambda(x+y+x^2+y^2-4)$

令 $\begin{cases} F_x'=4x^3+4xy^2+2x+\lambda(1+2x)=0 \\ F_y'=4y^3+4x^2y+2y+\lambda(1+2y)=0 \\ F_\lambda'=x+y+x^2+y^2-4=0 \end{cases}$

解得$(x_1,y_1)=(1,1),(x_2,y_2)=(-2,-2)$，代入 $z=x^2+y^2$，得 $z_1=2,z_2=8$

故所求的最大值为 72，最小值为 6.

(22) 【详解】**(I)证法一**：

$$|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-\frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=\cdots$$

$$\xlongequal{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix}=2a\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{4a}{3}\cdots\frac{(n+1)a}{n}=(n+1)a^n$$

证法二：记 $D_n=|A|$，下面用数学归纳法证明 $D_n=(n+1)a^n$.

当 $n=1$ 时， $D_1=2a$，结论成立.

当 $n=2$ 时， $D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$，结论成立.

假设结论对小于 n 的情况成立. 将 D_n 按第 1 行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix} a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n$$

故 $\quad |A|=(n+1)a^n$

证法三：记 $D_n=|A|$，将其按第一列展开得 $D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$，

所以 $\quad D_n-aD_{n-1}=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})$

$$=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n$$

即 $\quad D_n=a^n+aD_{n-1}=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n++a^2D_{n-2}$

$$=\cdots=(n-2)a^n+a^{n-2}D_2=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1$$

$$=(n-1)a^n+a^{n-1}\cdot 2a=(n+1)a^n$$

(II) 因为方程组有唯一解，所以由 $Ax=B$ 知 $|A|\neq 0$，又 $|A|=(n+1)a^n$，故 $a\neq 0$．由克莱姆法则，将 D_n 的第 1 列换成 b，得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = D_{n-1} = na^{n-1}$$

所以 $x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$

(III) 方程组有无穷多解，由 $|A|=0$，有 $a=0$，则方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为 $k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$，$k$ 为任意常数.

(23)【详解】(I)

证法一：假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关．因为 α_1,α_2 分别属于不同特征值的特征向量，故 α_1,α_2 线性无关，则 α_3 可由 α_1,α_2 线性表出，不妨设 $\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，其中 l_1,l_2 不全为零(若 l_1,l_2 同时为 0，则 α_3 为 0，由 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 可知 $\alpha_2=0$，而特征向量都是非 0 向量，矛盾)

$\because A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$

$\therefore A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，又 $A\alpha_3=A(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2)=-l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$

$\therefore -l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，整理得：$2l_1\alpha_1+\alpha_2=0$

则 α_1,α_2 线性相关，矛盾. 所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

证法二：设存在数k_1, k_2, k_3，使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ (1)

用 A 左乘(1)的两边并由 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$ 得

$$-k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \qquad (2)$$

(1)—(2)得 $\qquad 2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$ (3)

因为 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量，所以α_1, α_2线性无关，从而

$k_1 = k_3 = 0$，代入(1)得 $k_2\alpha_2 = 0$，又由于$\alpha_2 \neq 0$，所以 $k_2 = 0$，故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. (II)

记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，则 P 可逆，

$$AP = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $\qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.