2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为______

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2dt, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______

(3) 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}=$______

(4) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是______

(5) 设函数 $y=y(x)$由方程 $y=1-xe^y$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$______

(6) 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$___.

二、选择题：9-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\quad f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应增量与微分，若 $\Delta x>0$，则(　)

(A) $0<dy<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<dy$

(C) $\Delta y<dy<0$　　(D) $dy<\Delta y<0$

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是其第一类间断点，则 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 是(　)

(A)连续的奇函数　　(B)连续的偶函数

(C)在 $x=0$ 间断的奇函数　　(D)在 $x=0$ 间断的偶函数

(9) 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)}, h'(1)=1, g'(1)=2$, 则 $g(1)$等于(　)

(A) $\ln 3-1$　　(B) $-\ln 3-1$　　(C) $-\ln 2-1$　　(D) $\ln 2-1$

(10) 函数 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是(　)

(A) $y''-y'-2y=3xe^x$　　(B) $y''-y'-2y=3e^x$

(C) $y''+y'-2y=3xe^x$　　(D) $y''+y'-2y=3e^x$

(11) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于(　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(12) 设 $f(x,y)$与$\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y) \neq 0$,已知 (x_0,y_0)是$f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是(　)

(A)若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则$f_y'(x_0,y_0)=0$　　(B)若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

(C)若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则$f_y'(x_0,y_0)=0$　　(D)若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

(13) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是(　)

(A)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关.

(B)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关.

(C)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关.

(D)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关.

(14) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　)

(A) $C=P^{-1}AP$.　　(B) $C=PAP^{-1}$.　　(C) $C=P^TAP$.　　(D) $C=PAP^T$.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

试确定常数 A,B,C 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

(16)(本题满分 10 分)

求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$

(17)(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$

(18)(本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$， $x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$

(I) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限; (II) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19)(本题满分 10 分)

证明：当 $0<a<b<\pi$ 时， $b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

(20)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $Z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

(I)验证 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$; (II)若 $f(1)=0, f'(1)=1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21)(本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程 $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=4t-t^2 \end{cases}$, $(t\ge 0)$,

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0,y_0)，并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应 $x\le x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(22)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解.

(I) 证明此方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$; (II) 求 a,b 的值及方程组的通解.

(23)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3,向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵Q和对角矩阵Λ,使得$Q^T AQ=\Lambda$.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】 $y=\frac{1}{5}$

【详解】 由水平渐近线的定义及无穷小量的性质----“无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量”可知

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4\sin x}{x}}{5-\frac{2\cos x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{5-0}=\frac{1}{5}$$

$x\to 0$时$\frac{1}{x}$为无穷小量， $\sin x$， $\cos x$均为有界量. 故， $y=\frac{1}{5}$是水平渐近线.

(2)【答案】 $\frac{1}{3}$

【详解】按连续性定义，极限值等于函数值，故

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int^x \sin t^2}{x^3} \xlongequal{洛} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x_2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

注：$\frac{0}{0}$型未定式，可以采用洛必达法则；等价无穷小量的替换$\sin x^2 \ _{\triangle}\ x^2$

(3)【答案】1|2

【详解】

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

(4) 【答案】Cxe^{-x}.

【详解】分离变量，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(1-x)}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{(1-x)}{x}dx\Rightarrow\frac{dy}{y}=(\frac{1}{x}-1)dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1}{x}dx-\int dx$$

$$\Rightarrow\ln y=\ln x-x+c\quad\Rightarrow e^{\ln y}=e^{\ln x-x+c}\quad\Rightarrow y=Cxe^{-x}$$

(5)【答案】$-e$

【详解】题目考察由方程确定的隐函数在某一点处的导数.

在原方程中令 $x=0\Rightarrow y(0)=1$.

将方程两边对 x 求导得 $y'=-e^y-xe^y y'$，令 $x=0$ 得 $y'(0)=-e$

(6) 【答案】 2

【详解】由已知条件 $BA=B+2E$ 变形得， $BA-2E=B\Rightarrow B(A-E)=2E$，两边取行列式, 得

$$|B(A-E)|=|2E|=4|E|=4$$

其中，$|A-E|=\left|\begin{bmatrix}2&1\\-&\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\&\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$， $|2E|=2^2|E|=4$

因此，$|B|=\dfrac{|2E|}{|A-E|}=\dfrac{4}{2}=2$.

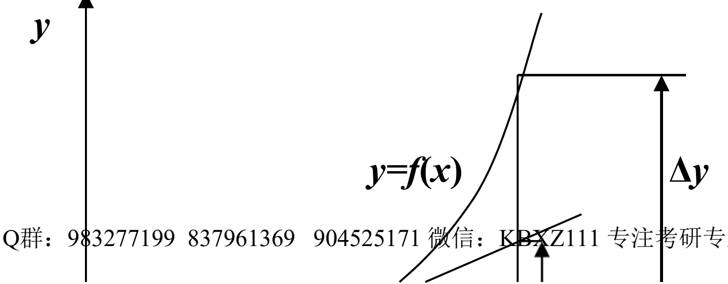
二、选择题.

(7)【答案】 A

【详解】

方法 1： 图示法.

因为 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 严格单调增加； 因为 $f''(x)>0$， 则 $f(x)$ 是凹函数， 又 $\vartriangle x>0$，画 $f(x)=x^2$ 的图形



结合图形分析，就可以明显得出结论：　$0 < dy < \triangle y$.

方法 2：用两次拉格朗日中值定理

$$\triangle y - dy = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) - f'(x_0)\triangle x \text{ (前两项用拉氏定理)}$$

$$= f'(\xi)\triangle x - f'(x_0)\triangle x \qquad \text{(再用一次拉氏定理)}$$

$$= f''(\eta)(\xi - x_0)\triangle x, \qquad \text{其中 } x_0 < \xi < x_0 + \triangle x, x_0 < \eta < \xi$$

由于 $f''(x) > 0$，从而 $\triangle y - dy > 0$. 又由于 $dy = f'(x_0)\triangle x > 0$，故选 $[A]$

方法 3：　用拉格朗日余项一阶泰勒公式. 泰勒公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n,$$

其中 $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^n$. 此时 n 取 1 代入，可得

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2} f''(\xi)(\Delta x)^2 > 0$$

又由 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$，选 (A) .

(8)【答案】(B)

【详解】

方法 1：赋值法

特殊选取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，满足所有条件，则 $\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = |x|$

它是连续的偶函数. 因此，选 (B)

方法 2：显然 $f(x)$ 在任意区间 $[a,b]$ 上可积，于是 $F(x) \overset{\text{记}}{=} \int_0^x f(t)dt$ 处处连续，又

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^{-x} f(-t)dt \overset{s=-t}{=} \int_0^x f(s)ds = F(x)$$

即 $F(x)$ 为偶函数 . 选 (B) .

(9)【答案】(C)

【详解】利用复合函数求导法

$h(x)=e^{1+g(x)}$ 两边对 x 求导 $\Rightarrow h'(x)=g'(x)e^{1+g(x)}$

将 $x=1$ 代入上式， $\Rightarrow 1=2e^{1+g(1)}\Rightarrow g(1)=\ln\dfrac{1}{2}-1=-\ln 2-1$. 故选(C).

(10) 【答案】(C)

【详解】题目由二阶线性常系数非齐次方程的通解，反求二阶常系数非齐次微分方程，分两步进行，先求出二阶常系数齐次微分方程的形式，再由特解定常数项.

因为 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x$ 是某二阶线性常系数非齐次方程的通解，所以该方程对应的齐次方程的特征根为 1 和-2，于是特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda+2)=\lambda^2+\lambda-2=0$ ，对应的齐次微分方程为 $y''+y'-2y=0$

所以不选(A)与(B)，为了确定是(C)还是(D)，只要将特解 $y^*=xe^x$ 代入方程左边，计算得 $(y^*)''+(y^*)'-2y^*=3e^x$ ，故选(D).

(11) 【答案】(C)

【详解】记 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ ，则区域 D 的极坐标表示是：$0\le r\le 1$ ， $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$. 题目考察极坐标和直角坐标的互化问题，画出积分区间，结合图形可以看出，直角坐标的积分范围（注意 $y=x$ 与 $x^2+y^2=1$ 在第一象限的交点是（ $\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2}$ ），于是 $D:0\le y\le\dfrac{\sqrt2}{2},y\le x\le\sqrt{1-y^2}$

所以，原式 $=\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$. 因此选 (C)

(12) 【答案】 D

【详解】

方法 1： 化条件极值问题为一元函数极值问题。

已知 $\varphi(x_0,y_0)=0$ ，由 $\varphi(x,y)=0$ ，在（ x_0,y_0 ）邻域，可确定隐函数 $y=y(x)$ ，满足 $y(x_0)=y_0$ ， $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ 。

（ x_0,y_0 ）是 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点 $\Leftrightarrow x=x_0$ 是 $z=f(x,y(x))$ 的极值点。它的必要条件是

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'_x(x_0,y_0)-f'_y(x_0,y_0)\left.\frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}\right|_{x=x_0}=0$$

若 $f'_x(x_0,y_0)=0$ ，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$ ，或 $\varphi'_x(x_0,y_0)=0$ ，因此不选 (A) ，(B) .

若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$ (否则 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}\neq 0$). 因此选$(D)$

方法 2：用拉格朗日乘子法. 引入函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，有

$$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 & (1)\\ F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0 & (2)\\ F'_\lambda=\varphi'(x,y)=0 \end{cases}$$

因为$\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以$\lambda=-\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$，代入(1)得

$$f'_x(x_0,y_0)=-\frac{f'_y(x_0,y_0)\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$$

若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$，选(D)

(13) 【答案】A

【详解】

方法 1：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关, 则由线性相关定义存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

为了得到 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$的形式，用 A 左乘等式两边, 得

$$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0 \qquad ①$$

于是存在不全为0 的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得①成立，所以 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关.

方法 2：如果用秩来解,则更加简单明了. 只要熟悉两个基本性质, 它们是:

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$； 2. $r(AB)<r(B)$.

矩阵 $(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，设 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$， 则由

$r(AB)<r(B)$ 得 $r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$. 所以答案应该为($A$).

(14) 【答案】 B

【详解】用初等矩阵在乘法中的作用(矩阵左乘或右乘初等矩阵相当于对矩阵进行初等行变换或列变换)得出

将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，即 $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A \underline{\text{记}} PA$

将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 C，即 $C=B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\underline{\text{记}} BQ$

因为 $PQ=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$，故 $Q=P^{-1}E=P^{-1}$.

从而 $C=BQ=BP^{-1}=PAP^{-1}$,故选(B).

三、解答题

(15) 【详解】

方法 1：用泰勒公式

将 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ 代入题设等式整理得

$$1+(B+1)x+(C+B+\frac{1}{2})x^2+\left(\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)=1+Ax+o(x^3)$$

比较两边同次幂函数得 $\begin{cases}B+1=A\\C+B+\frac{1}{2}=0\\\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}=0\end{cases}$，由此可解得 $A=\frac{1}{3}$， $B=-\frac{2}{3}$， $C=\frac{1}{6}$

方法 2： 用洛必达法则. 由 $e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)=1+Ax+o(x^3),(x\to 0)$

$$\Rightarrow \quad J\overset{(\text{记})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)-1-Ax}{x^3}=0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)+e^x(B+2Cx)-A}{3x^2}$$

要求分子极限为 0，即 $1+B-A=0$，否则 $J=\infty$

$$\Rightarrow \quad J=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)+2e^x(B+2Cx)+2e^xC}{6x}$$

要求分子极限为 0，即 $1+2B+2C=0$，否则 $J=\infty$

$$\Rightarrow \quad J=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)+3e^x(B+2Cx)+6e^xC}{6}=\frac{1+3B+6C}{6}=0$$

$$\Rightarrow \quad 1+3B+6C=0$$

所以

$$\begin{cases}1+B-A=0\\1+2B+2C=0\\1+3B+6C=0\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}A=\dfrac{1}{3}\\B=-\dfrac{2}{3}\\C=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

(16)【详解】题目考察不定积分的计算，利用变量替换和分部积分的方法计算.

$$\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=\int\frac{\arcsin e^x}{e^{2x}}\cdot e^x dx=\int\frac{\arcsin e^x}{e^{2x}}de^x \xlongequal{\text{令 } e^x=t}\int\frac{\arcsin t}{t^2}dt$$

$$=-\int\arcsin t\, d\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{\arcsin t}{t}+\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\arcsin t}{t}+\int\frac{tdt}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{t^2\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-t^2)}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-t^2}}$$

$$\xlongequal{\sqrt{1-t^2}=u}-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\int\frac{du^2}{u^3-u}=-\frac{\arcsin t}{t}+\int\frac{du}{u^2-1}$$

$$=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

所以 $$\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=-\frac{\arcsin e^x}{e^x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right|+C$$

(17)【详解】积分区域对称于 x 轴，$\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 为 y 的奇函数，

从而知 $$\iint_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$$

所以 $$I=\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy \xlongequal{\text{极坐标}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

(18) 【详解】(I) 由于$0<x<\pi$时，$0<\sin x<x$，于是$0<x_{n+1}=\sin x_n\le x_n$,说明数列$\{x_n\}$单调减少且 $x_n>0$．由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.记为 A．

递推公式两边取极限得 $A=\sin A$, $\therefore A=0$

(II) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$，为“$1^\infty$”型.

因为离散型不能直接用洛必达法则，先考虑$\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}$

$$\lim_{t\to 0}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln(\frac{\sin t}{t})}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2t}\triangle\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\triangle\frac{(t\cos t-\sin t)}{t^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-t\sin t-\cos t}{6t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin t}{6t}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

(19) 【详解】令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$， 只需证明$0<x<\pi$时，$f(x)$ 单调增加(严格)

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi$$

$$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$$

$\therefore f'(x)$ 单调减少(严格)，

又 $f'(\pi)=\pi\cos\pi+\pi=0$，故$0<x<\pi$时 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调增加(严格)

由$b>a$有$f(b)>f(a)$　　得证

(20) 【详解】(I)由于题目是验证，只要将二阶偏导数求出来代入题目中给的等式就可以了

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

同理 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\dfrac{f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

所 以 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$ 成立.

(II) 令 $f'(u)=p$ 于是上述方程成为 $\dfrac{dp}{du}=-\dfrac{p}{u}$，则 $\displaystyle\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{du}{u}+c$，

即 $\ln|p|=-\ln u+c$，所以 $f'(u)=p=\dfrac{c}{u}$

因为 $f'(1)=1$，所以 $c=1$，得 $f(u)=\ln u+c_2$

又因为 $f(1)=0$，所以 $c_2=0$，得 $f(u)=\ln u$

(21) 【详解】

方法 1：计算该参数方程的各阶导数如下

(I) $\dfrac{dx}{dt}=2t,\dfrac{dy}{dt}=4-2t,\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4-2t}{2t}=\dfrac{2}{t}-1$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{1}{t^3}<0\ (t>0\text{处})$$

所以曲线 L 在 $t>0$ 处是凸的

(II) 切线方程为 $y-0=\left(\dfrac{2}{t}-1\right)(x+1)$，设 $x_0=t_0^2+1$，$y_0=4t_0-t_0^2$，

则 $4t_0-t_0^2=\left(\dfrac{2}{t_0}-1\right)(t_0^2+2),\ 4t_0^2-t_0^3=(2-t_0)(t_0^2+2)$

得 $t_0^2+t_0-2=0,(t_0-1)(t_0+2)=0\ \because\ t_0>0\ \therefore t_0=1$

所以，切点为(2，3)，切线方程为 $y=x+1$

(III) 设 L 的方程 $x=g(y)$，则 $S=\displaystyle\int_0^3\left[\left(g(y)-(y-1)\right)\right]dy$

由 $t^2-4t+y=0$ 解出 $t=2\pm\sqrt{4-y}$ 得 $x=\left(2\pm\sqrt{4-y}\right)^2+1$

由于点(2，3)在 L 上，由 $y=3$ 得 $x=2$，可知 $x=\left(2-\sqrt{4-y}\right)^2+1=g(y)$

所以 $$S=\int_0^3\left[\left(9-y-4\sqrt{4-y}\right)-(y-1)\right]dy=\int_0^3(10-2y)dy-4\int_0^3\sqrt{4-y}dy$$

$$=(10y-y^2)\Big|_0^3+4\int_0^3\sqrt{4-y}\,d(4-y)=21+4\times\frac{2}{3}\times(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$$

$$=21+\frac{8}{3}-\frac{64}{3}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$$

方法 2：(I) 解出 $y=y(x)$：由 $t=\sqrt{x-1}$ $(x\ge1)$ 代入 y 得 $y=4\sqrt{x-1}-x+1$．

于是 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}-1$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-(x-1)^{-\frac{3}{2}}<0$ $(x>1)$ $\Rightarrow$ 曲线 L 是凸的．

(II) L 上任意点 (x_0,y_0) 处的切线方程是 $y-y_0=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(x-x_0)$，其中 $x_0>1$（$x_0=1$ 时不合题意）.

令 $x=-1$，$y=0$，得 $-4\sqrt{x_0-1}+x_0-1=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(-1-x_0)$

令 $t_0=\sqrt{x_0-1}$，得 $-4t_0+t_0^2=\left(\dfrac{2}{t_0}-1\right)(-2-t_0^2)$.

其余同方法 1，得 $t_0=1$

(III) 所求图形面积
$$S=\frac{9}{2}-\int_1^2 y(x)dx=\frac{9}{2}-\int_1^2(4\sqrt{x-1}-x+1)dx$$
$$=\frac{9}{2}-\left(4\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_1^2=\frac{9}{2}-\left(\frac{8}{3}-\frac{3}{2}+1\right)=\frac{9}{2}-\frac{13}{6}=\frac{7}{3}.$$

(22) 【详解】(I)系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{bmatrix}$ 未知量的个数为 $n=4$，且又 $AX=b$ 有三个线性无关解，设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组的 3 个线性无关的解，则 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 是 $AX=0$ 的两

个线性无关的解. 因为$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$线性无关又是齐次方程的解，于是 $AX=0$ 的基础解系中解的个数不少于 2，得$4-r(A)\ge 2$，从而$r(A)\le 2$.

又因为 A 的行向量是两两线性无关的，所以$r(A)\ge 2$. 所以$r(A)=2$.

(II)对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$[A|b]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&|-1\\4&3&5&-1&|-1\\a&1&3&b&|1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3]+[1]\times(-a)}]{[2]+[1]\times(-4)}\begin{bmatrix}1&1&1&1&|-1\\0&-1&1&-5&|3\\0&1-a&3-a&b-a&|1+a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2]\times(1-a)}\begin{bmatrix}1&1&1&1&|-1\\0&-1&1&-5&|3\\0&0&4-2a&4a+b-5&|4-2a\end{bmatrix},$$

所以$[A|b]$作初等行变换后化为；$\begin{bmatrix}1&0&2&-4&|2\\0&-1&-1&5&|-3\\0&0&0&0&|0\end{bmatrix}$,

它的同解方程组 $\begin{cases}x_1=2-2x_3+4x_4\\x_2=-3+x_3-5x_4\end{cases}$ ①

①中令 $x_3=0,x_4=0$ 求出 $AX=b$ 的一个特解$(2,-3,0,0)^T$；

$AX=0$ 的同解方程组是$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4\\x_2=x_3-5x_4\end{cases}$ ②

取$x_3=1,x_4=0$,代入②得$(-2,1,1,0)^T$；取 $x_3=0,x_4=1$，代入②得$(4,-5,0,1)^T$. 所以

$AX=0$ 的基础解系为$(-2,1,1,0)^T$，$(4,-5,0,1)^T$

所以方程组 $AX=b$ 的通解为：

$$(2,-3,0,0)^T+c_1(-2,1,1,0)^T+c_2(4,-5,0,1)^T，\ c_1,c_2 \text{ 为任意常数}$$

(23) 【详解】(I) 由题设条件 $A\alpha_1=0=0\alpha_1$，$A\alpha_2=0=0\alpha_2$，故α_1,α_2是 A 的对应于$\lambda=0$的特征向量，又因为α_1,α_2线性无关，故$\lambda=0$至少是 A 的二重特征值. 又因为 A 的每行元素之和为 3，所以有 $A(1,1,1)^T=(3,3,3)^T=3(1,1,1)^T$， 由特征值、特征向量的定义，

$\alpha_0=(1,1,1)^T$是A的特征向量,特征值为$\lambda_3=3$，λ_3只能是单根，$k_3\alpha_0, k_3\neq 0$是全体特征向量，从而知$\lambda=0$是二重特征值.

于是A的特征值为$3, 0,0$；属于3的特征向量: $k_3\alpha_3, k_3\neq 0$；属于0的特征向量: $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，k_1, k_2不都为0.

(Ⅱ)为了求出可逆矩阵必须对特征向量进行单位正交化 .

先将α_0单位化,得$\eta_0=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

对α_1,α_2作施密特正交化,得$\eta_1=(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$，$\eta_2=(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6})^T$.

作$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则Q是正交矩阵,并且$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$