2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$___.

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为________.

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$________.

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y\big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为________.

(6) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵，则 $|B|=$________.

二、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是（　）

(A) α,β,γ.　　(B) α,γ,β.

(C) β,α,γ.　　(D) β,γ,α.

(8) 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则（　）

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ 等于（ ）

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$. (B) $2\int_1^2 \ln x dx$.

(C) $2\int_1^2 \ln(1+x)dx$. (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x)dx$

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得（ ）

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减小.

(C)对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D)对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(11) 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为（ ）

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

(B) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

(C) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

(12) 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2y\right\}$, 则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ 等于（ ）

(A) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy)dy$. (B) $2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)dx$.

(C) $\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$. (D) $\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$

(13) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B, 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C, 则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为（ ）

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(14) 设 A,B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵, 则必有（　）

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0,2]$ 上, $f(x)=x(x^2-4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(I) 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式;　(II) 问 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17)(本题满分 11 分)

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt$,

(I) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;　(II) 求 $f(x)$ 的值域.

(18)(本题满分 12 分)

曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0$, $x=t\,(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x

轴旋转一周得一旋转体, 其体积为$V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(Ⅰ)求$\dfrac{S(t)}{V(t)}$的值; (Ⅱ)计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

(19)(本题满分 12 分)

设$e<a<b<e^2$, 证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

(20)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为$9000kg$ 的飞机,着陆时的水平速度为$700\ km/h$.经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^6$).问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少? (注： kg 表示千克, km/h 表示千米/小时)

(21)(本题满分 10 分)

设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$,其中 f 具有连续二阶偏导数,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(22)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解

(23)(本题满分 9 分)

设矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】0.

【详解】本题属于确定由极限定义的函数的连续性与间断点. 对不同的 x，先用求极限的方法得出 $f(x)$ 的表达式，再讨论 $f(x)$ 的间断点.

由 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，显然当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-\frac{1}{n})x}{x^2+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})x}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^2+\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$，

所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty\neq f(0)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

(2)【详解】判别由参数方程定义的曲线的凹凸性，先用由 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 定义的参数方程求出二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，再由 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ 确定 x 的取值范围.

$$\frac{dy}{dt}=\left(t^3-3t+1\right)'=3t^2-3,\quad \frac{dx}{dt}=\left(t^3+3t+1\right)'=3t^2+3$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=\frac{t^2+1-1-1}{t^2+1}=1-\frac{2}{t^2+1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)'\cdot\frac{1}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}\cdot\frac{1}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3},$$

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$（或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\leq 0$），即 $\dfrac{4t}{3(t^2+1)^3}<0$（或 $\dfrac{4t}{3(t^2+1)^3}\leq 0$）$\Rightarrow t<0$ $($或$t\leq 0)$

又 $x=t^3+3t+1$，$x'=3t^2+3>0$，所以 $x(t)$ 单调增，当 $t=0$ 时，$x=1$，所以当 $t<0$

时 $x(t)<x(0)=1$（或当 $t\le 0$ 时，$x(t)\le x(0)=1$），即 $x\in(-\infty,1)$（或 $x\in(-\infty,1]$）时，曲线凸

(3)【答案】$\dfrac{\pi}{2}$.

【详解】利用变量代换法可得所求的广义积分值.

方法 1：作积分变量变换，

令 $x=\sec t$，则 $x^2-1=\sec^2 t-1=\tan^2 t$，$dx=d\sec t=\sec t\tan t dt$，$t:0\to\dfrac{\pi}{2}$，

代入原式：

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\sec t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}.$$

方法 2：令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $dx=d\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}dt$，$t:1\to 0$，代入原式：

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int_1^0\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

(4)【答案】2.

【详解】此题可利用复合函数求偏导法、公式法或全微分公式求解.

方法 1：复合函数求偏导，在 $z=e^{2x-3z}+2y$ 的两边分别对 x,y 求偏导，z 为 x,y 的函数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}\left(2-3\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3z}\left(-3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2,$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$$

所以 $$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=3\cdot\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}=2\cdot\frac{1+3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=2$$

方法 2：令 $F(x,y,z)=e^{2x-3z}+2y-z=0$，则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=e^{2x-3z}\cdot 2$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=2$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=e^{2x-3z}(-3)-1$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{e^{2x-3z}\cdot 2}{-(1+3e^{2x-3z})}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2}{-(1+3e^{2x-3z})}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}},$$

从而 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=3\cdot\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}=2\cdot\frac{1+3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=2$

方法 3：利用全微分公式,得

$$dz=e^{2x-3z}(2dx-3dz)+2dy=2e^{2x-3z}dx+2dy-3e^{2x-3z}dz$$

即$(1+3e^{2x-3z})dz=2e^{2x-3z}dx+2dy$，得$dz=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}dx+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}dy$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$

从而 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=3\cdot\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}=2\cdot\frac{1+3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=2$

(5)【答案】$y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$.

【详解】此题为一阶线性方程的初值问题.可以利用常数变易法或公式法求出方程的通解,再利用初值条件确定通解中的任意常数而得特解.

方法 1：原方程变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2$,

先求齐次方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=0$ 的通解:

分离变量： $\frac{dy}{y}=\frac{1}{2x}dx$

两边积分得： $\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\ln c \Rightarrow y=c\sqrt{x}$

用常数变易法，设 $y=c(x)\sqrt{x}$ 为非齐次方程的通解，则 $y'=c'(x)\sqrt{x}+c(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$，

代入$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2$，得$c'(x)\sqrt{x}+c(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}(x)\ \sqrt{x}=\frac{1}{2}x^2$，即$c'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$,

积分得$c(x)=\int\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$,

于是非齐次方程的通解为： $y=\sqrt{x}(\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C)=C\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$

又由于 $y\big|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 代入通解，得 $C\sqrt{1}+\frac{1}{5}1^3=\frac{6}{5}\Rightarrow C=1$,

故所求特解为 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$.

方法 2：原方程变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2$,

由一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 通解公式：

$$f(x)=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

这里 $P(x)=-\frac{1}{2x}$，$Q(x)=\frac{1}{2}x^2$，代入上式得： $y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int\frac{1}{2}x^2e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]$

由于方程 $x=0$ 处方程无定义，所以解的存在区间内不能含有点 $x=0$.因此解的存在区间要么为 $x>0$ 的某区间，要么为 $x<0$ 的某区间. 现在初值给在 $x=1$ 处，所以 $x>0$，于是

$$y=e^{\frac{1}{2}\ln x}\left[\int\frac{1}{2}x^2e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx+C\right]=\sqrt{x}\left[\int\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx+C\right]=\sqrt{x}\left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\right]$$

再 $y(1)=\frac{6}{5}\Rightarrow C=1$,

从而特解为 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$.

(6) 【答案】 $\frac{1}{9}$

【详解】

方法 1：已知等式两边同时右乘 A，得 $ABA^*A=2BA^*A+A$，

由伴随矩阵的运算规律： $A^*A=AA^*=|A|E$，有 $AB|A|=2B|A|+A$，而

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=2\times2-1\times1=3,$$

于是有 $3AB=6B+A$，移项、合并有 $(3A-6E)B=A$，再两边取行列式，由方阵乘积的行列式的性质：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的积，有

$$|(3A-6E)B|=|3A-6E||B|=|A|=3,$$

而 $|3A-6E|=\left|3\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}6&3&0\\3&6&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&-3\end{vmatrix}$

$=(-1)^{3+3}(-3)\begin{vmatrix}0&3\\3&0\end{vmatrix}=(-3)\times3\times3=27$，

故所求行列式为 $|B|=\dfrac{|A|}{|3A-6E|}=\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

方法 2：由题设条件 $ABA^*=2BA^*+E$，得 $ABA^*-2BA^*=(A-2E)BA^*=E$

由方阵乘积行的列式的性质：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的积，故两边取行列式，有 $|(A-2E)BA^*|=|A-2E||B||A^*|=|E|=1$

其中 $|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=2\times2-1\times1=3$；

由伴随矩阵行列式的公式：若 A 是 n 阶矩阵，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

所以，$|A^*|=|A|^{3-1}=|A|^2=9$； 又 $|A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$.

故 $|B|=\dfrac{1}{|A-2E||A^*|}=\dfrac{1}{9}$.

二、选择题

(7)【答案】 (B)

【详解】

方法 1：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^x\cos t^2dt}\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x\cdot2x}{\cos x^2}=0$，则 β 是 α 的高阶无穷小，

根据题设，排在后面的是前一个的高阶无穷小，所以可排除(C),(D)选项，

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\gamma}{\beta}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x\tan x}$

$\overset{\text{等价无穷小替换}}{=\!=}\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x^2}=\infty$，

可见γ是比 β低阶的无穷小量，故应选(B).

方法 2：用 x^k(当 $x \to 0$ 时)去比较.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^k}\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2}{kx^{k-1}},$$

欲使上式极限存在但不为 0，应取$k=1$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos t^2}{x^0}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}\cos t^2}{\lim\limits_{x\to 0^+}x^0}=1$，

所以(当$x\to 0^+$时)α 与 x 同阶.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{x^k}\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{kx^{k-3}}$$

欲使上式极限存在但不为 0，应取$k=3$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\beta}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\tan x}{3x^{3-2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\tan x}{3x}=\frac{2}{3}$，

所以(当 $x\to 0^+$时) β与 x^3 同阶.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt}{x^k}\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2kx^{k-1}},$$

欲使上式极限存在但不为 0，应取$k=2$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{2\cdot 2x^{2-1}}=\frac{1}{4}$，

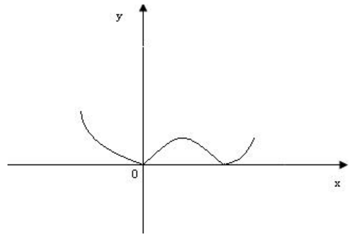
所以(当 $x\to 0^+$时) γ与 x^2同阶.因此，后面一个是前面一个的高阶小的次序是 α,γ,β，选(B).

(8)【答案】C

【详解】由于是选择题，可以用图形法解决，也可用分析法讨论.

方法 1：由于是选择题，可以用图形法解决，令$\varphi(x)=x(x-1)$，则$\varphi(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

是以直线 $x=\frac{1}{2}$ 为对称轴，顶点坐标为$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$，开口向上的一条抛物线，与 x 轴相交的两点坐标为$(0,0),(1,0)$，$y=f(x)=|\varphi(x)|$的图形如图.



点 $x=0$ 是极小值点；又在点$(0,0)$ 左侧邻近曲线是凹的，右侧邻近曲线是凸的，

所以点$(0,0)$ 是拐点，选 C.

方法 2：写出 $y=f(x)$ 的分段表达式： $f(x)=\begin{cases}-x(1-x), & -1<x\le 0\\ x(1-x), & 0<x<1\end{cases}$，

从而 $f'(x)=\begin{cases}-1+2x, & -1<x<0\\ 1-2x, & 0<x<1\end{cases}$， $f''(x)=\begin{cases}2, & -1<x<0\\ -2, & 0<x<1\end{cases}$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-2x)=1>0$，所以$0<x<1$时， $f(x)$ 单调增，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1+2x)=-1<0$，所以$-1<x\le 0$ 时， $f(x)$ 单调减，

所以 $x=0$ 为极小值点.

当 $-1<x<0$ 时， $f''(x)=2>0$， $f(x)$ 为凹函数； 当 $1>x>0$ 时， $f''(x)=-2<0$， $f(x)$ 为凸函数, 于是$(0,0)$ 为拐点.

(9)【答案】 B

【详解】由对数性质，

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\ln\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right]^{\frac{2}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}=2\int_0^1\ln(1+x)dx\xlongequal{1+x=t}2\int_1^2\ln t\,dt=2\int_1^2\ln x\,dx$$

(10)【答案】 (C)

【详解】函数 $f(x)$ 只在一点的导数大于零，一般不能推导出单调性，因此可排除(A),(B).

由导数的定义，知 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$

根据极限的保号性，知存在$\delta>0$，当$x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$时，有$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$.

即当$x\in(-\delta,0)$时，$x<0$，有$f(x)<f(0)$；而当$x\in(0,\delta)$时，$x>0$有$f(x)>f(0)$.

(11)【答案】A

【详解】利用待定系数法确定二阶常系数线性非齐次方程特解的形式.

对应齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+1=0$, 则特征根为 $\lambda=\pm i$,

对$y''+y=x^2+1=e^0(x^2+1)$为$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型，其中$\lambda=0, P_m(x)=x^2+1$，因 0 不是特征根, 从而其特解形式可设为

$$y_1^*=(ax^2+bx+c)e^0=ax^2+bx+c$$

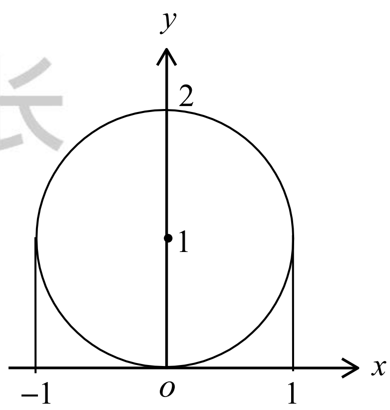
对 $y''+y=\sin x$, 为 $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$型，其中 $\lambda=0$，$\omega=1, P_l(x)=0, P_n(x)=1$，因$\lambda+\omega i=0+i=i$为特征根, 从而其特解形式可设为

$$y_2^*=x(A\sin x+B\cos x)$$

由叠加原理，故方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

$$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$$

(12)【答案】D



【详解】由 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2y\}$，则积分区域是以$(0,1)$为圆心，1 为半径的圆及其内部，积分区域见右图.

在直角坐标系下, 先 x 后 y，

$$-\sqrt{2y-y^2}\le x\le\sqrt{2y-y^2}，\ 0\le y\le 2$$

则应是

$$\iint_D f(xy)dxdy=\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)dx$$

先y后x，由$x^2+(y-1)^2\le 1\Rightarrow 1-\sqrt{1-x^2}\le y\le 1+\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1$，则应是

$$\iint_D f(xy)dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(xy)dy$$

故应排除$[A],[B]$.

在极坐标系下，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,

$$\iint_D f(xy)dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$$，故应选 D.

或直接根据极坐标下，其面积元素为$rdrd\theta$，则可排除 C

(13)【答案】(D)

【详解】由题设，将 A 的第 1 列与第 2 列交换，即

$$AE_{12}=A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B,$$

将 B 的第 2 列加到第 3 列，即

$$B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=AQ.$$

故$Q=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，应选(D).

(14)【答案】(A)

【详解】**方法 1：**由矩阵秩的重要公式：若 A 为$m\times n$矩阵，B 为$n\times p$矩阵，如果 $AB=0$，

则$r(A)+r(B)\le n$

设 A 为$m\times n$矩阵，B 为$n\times s$矩阵，由 $AB=0$知，$r(A)+r(B)\le n$，其中 n 是矩阵 A 的列数，也是 B 的行数

因 A 为非零矩阵，故$r(A)\ge 1$，因 $r(A)+r(B)\le n$，从而 $r(B)\le n-1<n$，由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数，知 B 的行向量组线性相关.

因 B 为非零矩阵，故$r(B)\ge 1$，因 $r(A)+r(B)\le n$，从而 $r(A)\le n-1<n$，由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数，知 A 的列向量组线性相关.

故应选(A).

方法 2：设 A 为$m\times n$矩阵，B 为$n\times s$矩阵，将 B 按列分块，由 $AB=0$ 得，

$$AB=A[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]=0, A\beta_i=0, i=1,2,\cdots,s.$$

因 B 是非零矩阵，故存在 $\beta_i \neq 0$，使得 $A\beta_i = 0$. 即齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解. 由齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件 $r(A) < n$，知 $r(A) < n$. 所以 A 的列向量组线性相关.

又 $(AB)^T = B^T A^T = 0$，将 A^T 按列分块，得

$$B^T A^T = B^T[\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_m^T] = 0, B^T\alpha_i^T = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$

因 A 是非零矩阵，故存在 $\alpha_i^T \neq 0$，使得 $B^T\alpha_i^T = 0$，即齐次线性方程组 $Bx = 0$ 有非零解. 由齐次线性方程组 $Bx = 0$ 有非零解的充要条件，知 B^T 的列向量组线性相关，由 B^T 是由 B 行列互换得到的，从而 B 的行向量组线性相关，故应选(A).

方法 3： 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{n\times s}$，将 A 按列分块，记 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$

由 $AB = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}A_1 + \cdots + b_{n1}A_n, & \cdots & , b_{1s}A_1 + \cdots + b_{ns}A_n \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

由于 $B \neq 0$，所以至少有一个 $b_{ij} \neq 0$ ($1 \le i \le n, 1 \le j \le s$)，又由 (1) 知，$b_{1j}A_1 + b_{2j}A_2 + \cdots + b_{ij}A_i + \cdots + b_{nj}A_n = 0$，所以 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 线性相关. 即 A 的列向量组线性相关.

(向量组线性相关的定义：如果对 m 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in R^n$，有 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in R$，使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_m\alpha_m = 0$ 成立，则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.)

又将 B 按行分块，记 $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$，同样，

$$AB = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + \cdots + a_{1n}B_n \\ a_{21}B_1 + a_{22}B_2 + \cdots + a_{2n}B_n \\ \cdots \\ a_{m1}B_1 + a_{m2}B_2 + \cdots + a_{mn}B_n \end{pmatrix} = 0$$

由于 $A\neq 0$,则至少存在一个$a_{ij}\neq 0\,(1\le i\le m,1\le j\le n)$, 使

$$a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+a_{ij}B_j+\cdots+a_{in}B_n=0,$$

由向量组线性相关的定义知， $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 线性相关, 即 B 的行向量组线性相关,

故应选(A).

方法 4：用排除法.取满足题设条件的 A,B .

取 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\neq 0, B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\neq 0$，有 $AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=0,$

A 的行向量组，列向量组均线性相关，但 B 的列向量组线性无关，故(B)，(D)不成立.

又取 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\neq 0, B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\neq 0$，有 $AB=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}=0,$

A 的行向量组线性无关， B 的列向量组线性相关，故(C)不成立.

由排除法知应选(A).

三、解答题.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【答案】$-\frac{1}{6}$

【详解】此极限属于 $\frac{0}{0}$ 型未定式.可利用洛必达法则,并结合无穷小代换求解.

方法 1： $\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x=e^{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x}=e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}\xlongequal{e^x-1\sim x}\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(2+\cos x)-\ln 3)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot1=-\frac{1}{6}$$

方法 2：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}\underset{e^x-1\sim x}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x}\underline{\qquad}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\quad\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$\underset{1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}}{=}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

(16)【详解】(I)当 $-2\le x<0$,则$0\le x+2<2$,由题设：区间$[0,2]$ 上,$f(x)=x(x^2-4)$ 知,

$$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=k(x+2)(x^2+4x)=kx(x+2)(x+4).$$

(II) 由(I)知：$f(x)=\begin{cases}x(x^2-4), & x\in[0,2]\\ kx(x+2)(x+4), & x\in[-2,0)\end{cases}$，所以 $f(0)=0\cdot(0^2-4)=0$，

按函数在某点可导的充要条件：在这点的左右导数存在且相等. 所以根据导数的定义求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左右导数，使其相等，求出参数k .

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2-4)-0}{x}=-4$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)-0}{x}=8k.$$

令 $f'_-(0)=f'_+(0)$, 得$k=-\frac{1}{2}$. 即当$k=-\frac{1}{2}$时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17) 【详解】利用变量代换讨论变限积分定义的函数的周期性,利用求函数最值的方法讨论 函数的值域.

(I) 要证 $f(x)$ 是以π 为周期的周期函数，即证： $f(x)=f(x+\pi)$

因为 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$，所以 $f(x+\pi)=\int_{(x+\pi)}^{(x+\pi)+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|dt$

利用变量代换讨论变限积分定义的函数的周期性，设$t=u+\pi$，因为$t:x+\pi\to x+\frac{3\pi}{2}$，

所以$u:x\to x+\frac{\pi}{2}$，则有

$$f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\,d(u+\pi)\ \underline{\underline{\sin(u+\pi)=-\sin u}}\ \int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,du=f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(II) 因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数, 故只需在 $[0,\pi]$ 上讨论其值域. 又因 $f(x)$ 为积分函数，则一定连续，根据有界性与最大值最小值定理：在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值，所以 $f(x)$ 的值域就是区间 $[\min f(x),\max f(x)]$.

令 $f'(x)=\left|\sin(x+\dfrac{\pi}{2})\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|=0$，在区间 $[0,\pi]$ 内求得驻点，

$x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{3\pi}{4}$，且

$$f(\frac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin t|\,dt\ \underline{\underline{\sin t>0}}\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,dt=\sqrt{2},$$

$$f(\frac{3\pi}{4})=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,dt=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,dt-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\,dt=2-\sqrt{2},$$

又 $f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1$，$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\,dt=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\,dt=1$,

比较极值点与两个端点处的值，知 $f(x)$ 的最小值是 $2-\sqrt{2}$，最大值是 $\sqrt{2}$，故 $f(x)$ 的值域是 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(18) 【详解】(I) 旋转体体积：$V(t)=\pi\int_0^t y^2dx=\pi\int_0^t\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx$

旋转体的侧面积：$S(t)=\int_0^t 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'^2}\,dx=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx,$$

所以
$$\frac{S(t)}{V(t)}=\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}{\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}=2.$$

(Ⅱ) 在 $x=t$ 处旋转体的底面积为

$$F(t)=\pi y^2\Big|_{x=t}=\pi\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\Bigg|_{x=t}=\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2,$$

所以
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}{\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\left[\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx\right]'}{\left[\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\right]'}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1+e^{-2t}}{1-e^{-2t}}=1$$

(19) 【详解】根据要证不等式的形式，可考虑用拉格朗日中值定理或转化为函数不等式用单调性证明.

方法 1：因为函数 $f(x)=\ln^2 x$ 在 $[a,b]\subset(e,e^2)$ 上连续，且在 (a,b) 内可导，所以满足拉格朗日中值定理的条件，

对函数 $f(x)=\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\left(\ln^2\xi\right)'(b-a)=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\quad e<a<\xi<b<e^2$$

下证：$\dfrac{2\ln\xi}{\xi}>\dfrac{4}{e^2}$.

设 $\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，则 $\varphi'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$，当 $t>e$ 时，$1-\ln t<1-\ln e=0$，即 $\varphi'(t)<0$,

所以 $\varphi(t)$ 单调减少，又因为 $\xi<e^2$，所以 $\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}，得\frac{2\ln\xi}{\xi}>\frac{4}{e^2}$$

故 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

方法 2：利用单调性， 设$\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$，证$\varphi(x)$在区间$\left(e,e^2\right)$内严格单调增即可.

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}，(\varphi'(e^2)=2\frac{\ln e^2}{e^2}-\frac{4}{e^2}=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0，)\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}，$$

当$x>e$时，$1-\ln x<1-\ln e=0$，$\varphi''(x)<0$，故$\varphi'(x)$单调减少，从而当$e<x<e^2$时，

$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=0$，即当$e<x<e^2$时，$\varphi(x)$单调增加.

因此当$e<x<e^2$时，$\varphi(b)>\varphi(a)$，即$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a$，

故 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

方法 3：设$\varphi(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a)$，则$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$，$\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}$，

$\Rightarrow x>e$时，$1-\ln x<1-\ln e=0$，得$\varphi''(x)<0$，

$\Rightarrow \varphi'(x)$在(e,e^2)上单调减少，从而当 $e<x<e^2$时，$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0$，

$\Rightarrow \varphi(x)$在(e,e^2)上单调增加. 从而当$e<a<x\le b<e^2$时，$\varphi(x)>\varphi(a)=0$.

$\Rightarrow \varphi(b)>0$，即$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

(20) 【详解】 本题是标准的牛顿第二定理的应用，列出关系式后再解微分方程即可.

方法 1：由题设，飞机质量 $m=9000kg$，着陆时的水平速度$v_0=700km/h$. 从飞机接触跑道开始计时，设t时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为$v(t)$，则 $v(0)=v_0, x(0)=0$.

根据牛顿第二定律，得$m\frac{dv}{dt}=-kv$. 又$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$.

由以上两式得$dx=-\frac{m}{k}dv$，积分得 $x(t)=-\frac{m}{k}v+C$.

由于$v(0)=v_0, x(0)=0$，所以 $x(0)=-\frac{m}{k}v_0+C=0$. 故得$C=\frac{m}{k}v_0$，

从而 $x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t))$.

当$v(t)\to 0$ 时， $x(t)\to \dfrac{mv_0}{k}=\dfrac{9000\times 700}{6.0\times 10^6}=1.05(km).$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05km.

方法 2：根据牛顿第二定律，得 $m\dfrac{dv}{dt}=-kv$，

分离变量：$\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{k}{m}dt$，两端积分得：$\ln v=-\dfrac{k}{m}t+C_1$，

通解：$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$，代入初始条件$v\Big|_{t=0}=v_0$，解得$C=v_0$，故$v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$.

飞机在跑道上滑行得距离相当于滑行到 $v\to 0$，对应地 $t\to+\infty$. 于是由 $dx=vdt$，有

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)dt=\int_0^{+\infty}v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05(km).$$

或由 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$，知 $x(t)=\int_0^t v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt=-\dfrac{kv_0}{m}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)$，故最长距离为

当$t\to\infty$ 时， $x(t)\to\dfrac{kv_0}{m}=1.05(km).$

方法 3：由$m\dfrac{dv}{dt}=-kv$ ，$v=\dfrac{dx}{dt}$，化为 x 对 t 的求导，得$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k\dfrac{dx}{dt}$，变形为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=0,\quad v(0)=x'(0)=v_0,x(0)=0$$

其特征方程为 $\lambda^2+\dfrac{k}{m}\lambda=0$，解之得$\lambda_1=0,\lambda_2=-\dfrac{k}{m}$， 故 $x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}$.

由 $x\big|_{t=0}=0,v\big|_{t=0}=\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-\dfrac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_{t=0}=v_0$，得$C_1=-C_2=\dfrac{mv_0}{k}$，

于 是 $x(t)=\dfrac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$. 当$t\to+\infty$时， $x(t)\to\dfrac{mv_0}{k}=1.05(km).$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05 km .

(21) 【详解】利用复合函数求偏导和混合偏导的方法直接计算.

令 $u=x^2-y^2,v=e^{xy}$，则 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})=f(u,v)$，

所以$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$， $\dfrac{\partial v}{\partial x}=ye^{xy},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=xe^{xy}$

所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2xf'_1+ye^{xy}f'_2$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2yf'_1+xe^{xy}f'_2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2yf'_1+xe^{xy}f'_2\right)$$

$$=-2y\left(f''_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+f''_{12}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+e^{xy}f'_2+xye^{xy}f'_2+xe^{xy}\left(f''_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+f''_{22}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=-2y\left(2xf''_{11}+ye^{xy}f''_{12}\right)+e^{xy}f'_2+xye^{xy}f'_2+xe^{xy}\left(2xf''_{21}+ye^{xy}f''_{22}\right)$$

$$=-4xyf''_{11}+2(x^2-y^2)e^{xy}f''_{12}++xye^{2xy}f''_{22}+e^{xy}(1+xy)f'_2$$

(2) 【详解】

方法 1：对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,\cdots n)]{1行\times(-i)+i行}\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}=B$$

对$|B|$是否为零进行讨论：

当$a=0$时，$r(A)=1<n$，由齐次方程组有非零解的判别定理：设 A 是$m\times n$矩阵，齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $r(A)<n$. 故此方程组有非零解，把 $a=0$ 代入原方程组，得其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \qquad (*)$$

此时，$r(A)=1$，故方程组有$n-r=n-1$个自由未知量. 选$x_2,x_3,\cdots,x_n$为自由未知量，将他们的$n-1$组值$(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$分别代入$(*)$式，得基础解系

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\quad \eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\ \cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

于是方程组的通解为

$$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1},\quad 其中k_1,\cdots,k_{n-1}为任意常数.$$

当 $a \neq 0$ 时，对矩阵 B 作初等行变换，有

$$B \to \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(i=2,3\cdots n)]{i\times(-1)+1\text{行}} \begin{bmatrix} a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

可知 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(A)=n-1<n$，由齐次方程组有非零解的判别定理, 知方程组也有非零解，把 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 代入原方程组，其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ -nx_1+x_n=0, \end{cases}$$

此时，$r(A)=n-1$，故方程组有 $n-r=n-(n-1)=1$ 个自由未知量.选 x_2 为自由未量，取 $x_2=1$，由此得基础解系为 $\eta=(1,2,\cdots,n)^T$，于是方程组的通解为 $x=k\eta$，其中 k 为任意常数.

方法 2：计算方程组的系数行列式：

$$A=\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} \xlongequal{\text{矩阵加法}} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$$

$$=aE+\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \underline{\underline{\Delta}}\, aE+Q,$$

下面求矩阵 Q 的特征值：

$$|\lambda E-Q|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -2 & \lambda-2 & -2 & \cdots & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & -n & -n & \cdots & \lambda-n \end{vmatrix} \xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{1\text{行}\times(-i)+i\text{行}} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n\lambda & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[(i=2,3,\cdots,n)]{i列\times(i)+1列}\begin{vmatrix} \lambda-\frac{n(n+1)}{2} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

则 Q 的特征值 $0,\dots,0,\frac{n(n+1)}{2}$，由性质：若 $Ax=\lambda x$，则 $(kA)x=(k\lambda)x, A^m x=\lambda^m x$，因此对任意多项式 $f(x)$， $f(A)x=f(\lambda)x$，即 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值.

故，A 的特征值为 $a,a,\cdots,a+\frac{n(n+1)}{2}$，由特征值的乘积等于矩阵行列式的值，得 A 行列式 $|A|=(a+\frac{n(n+1)}{2})a^{n-1}$.

由齐次方程组有非零解的判别定理：设 A 是 n 阶矩阵，齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $|A|=0$. 可知，当 $|A|=0$，即 $a=0$ 或 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,\cdots n)]{1行\times(-i)+i行}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ .$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

此时，$r(A)=1$，故方程组有 $n-r=n-1$ 个自由未知量.选 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由未知量，将他们的 $n-1$ 组值 $(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$ 分别代入 $(*)$ 式， 由此得基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\quad \eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

于是方程组的通解为

$$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}，\ 其中 k_1,\cdots,k_{n-1} 为任意常数.$$

当 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，

$$B \to \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(i=2,3\cdots n)]{i\times(-1)+1行} \begin{bmatrix} a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

即 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，其同解方程组为 $\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ -nx_1+x_n=0, \end{cases}$

此时，$r(A)=n-1$，故方程组有$n-r=n-(n-1)=1$个自由未知量. 选 x_2 为自由未量，

取 $x_2=1$，由此得基础解系为$\eta=(1,2,\cdots,n)^T$，于是方程组的通解为 $x=k\eta$，其中k 为任意常数.

(23) 【详解】 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \underline{\underline{2行\times(-1)+1行}} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-2) & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{提出1行公因数}}(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \underline{\underline{1行\times(-1)+2行}}(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{1行+2行}}(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 3 \\ 0 & -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 3 \\ -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-5)+3(a+1)]=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

已知 A 有一个二重特征值，有两种情况，(1) $\lambda=2$ 就是二重特征值，(2)若$\lambda=2$ 不是二重根，则$\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 是一个完全平方

(1) 若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有$2^2-16+18+3a=0,$ 解得$a=-2$. 由

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3\times(-2))=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+12)=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$$

求得 A 的特征值为 2,2,6, 由

$$2E-A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{1行(-1)倍加到2行, \\ 1行的1倍加到3行}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

知秩$(2E-A)=1$，故$\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量的个数为 $n-r=3-1=2$，等于 $\lambda=2$ 的重数. 由矩阵与对角矩阵相似的充要条件：对矩阵的每个特征值，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数, 从而 A 可相似对角化.

(2) 若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方， 从而 $18+3a=16$，解得 $a=-\frac{2}{3}$. 当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，由

$$|\lambda E-A|==(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3\times(-\frac{2}{3}))=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+16)=(\lambda-2)(\lambda-4)^2=0$$

知 A 的特征值为 2，4，4，由

$$4E-A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1行\times\frac{1}{3}+3行} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知秩$(4E-A)=2$，故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量有$n-r=3-2=1$, 不等于$\lambda=4$ 的重数，则由矩阵与对角矩阵相似的充要条件：对矩阵的每个特征值，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数, 知 A 不可相似对角化.