2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 若 $x \to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$__________.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程是__________.

(3) $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 __________.

(4) 设曲线的极坐标方程为 $\rho=e^{a\theta}\,(a>0)$，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 __________.

(5) 设 α 为 3 维列向量，α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，则

$\alpha^T\alpha=$__________.

(6) 设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=E$，其中 E 为三阶单位矩阵，若

$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $|B|=$___.

二、选择题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　)

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

(2) 设 $a_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于(　　)

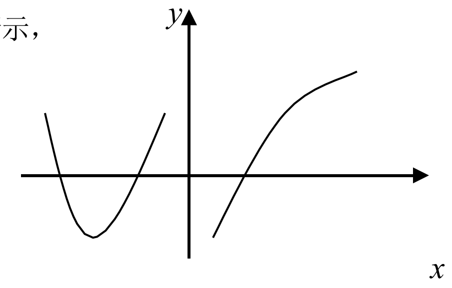
(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$.　　(B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.

(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$.　　(D) $(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$.

(3) 已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi(\dfrac{x}{y})$ 的解，则 $\varphi(\dfrac{x}{y})$ 的表达式为(　　)

(A) $-\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(B) $\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(C) $-\dfrac{x^2}{y^2}$.　　(D) $\dfrac{x^2}{y^2}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，



则 $f(x)$ 有(　　)

(A)一个极小值点和两个极大值点.
(B)两个极小值点和一个极大值点.
(C) 两个极小值点和两个极大值点.
(D) 三个极小值点和一个极大值点.

(5) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx$，则(　　)

(A) $I_1>I_2>1$.　　(B) $1>I_1>I_2$.

(C) $I_2>I_1>1$.　　(D) $1>I_2>I_1$.

(6)设向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则(　　)

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关.　(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关.
(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关.　(D) 当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关.

三 、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

四 、(本题满分 9 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+2t^2, \\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du \end{cases}$ $(t>1)$所确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$.

五 、(本题满分 9 分)

计算不定积分 $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx.$

六、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)$)在$(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$的解.

七 、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

八 、(本题满分 12 分)

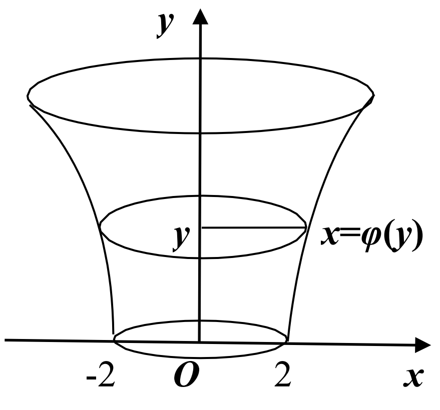
设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$，其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为Q，且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程；

(2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$上的弧长为l，试用l表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s .

九 、(本题满分 10 分)

有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)(y\geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图)，容器的底面圆的半径为 $2\,m$. 根据设计要求，当以$3m^3/\min$ 的速率向容器内注入



液体时，液面的面积将以$\pi m^2/\min$的速率均

匀扩大(假设注入液体前，容器内无液体).

(1) 根据t时刻液面的面积，写出t与$\varphi(y)$之间的关系式；

(2) 求曲线$x=\varphi(y)$的方程.

(注： m 表示长度单位米， min 表示时间单位分.)

十 、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，证明：

(1) 在(a,b) 内 $f(x)>0$；

(2) 在(a,b)内存在点ξ，使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

(3) 在(a,b)内存在与(2)中ξ相异的点η，使 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx.$

十 一、(本题满分 10 分)

若矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$相似于对角阵$\Lambda$，试确定常数 a 的值；并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

十二 、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$l_1: ax+2by+3c=0$， $l_2: bx+2cy+3a=0$， $l_3: cx+2ay+3b=0$.

试证: 这三条直线交于一点的充分必要条件为$a+b+c=0$.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】-4

【详解】当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$，$\sin x\sim x$，则 $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1\sim-\frac{1}{4}ax^2$，$x\sin x\sim x^2$

由题设已知，当 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，

所以 $1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{1}{4}a$，

从而 $a=-4$.

(2)【答案】 $x-y=0$

【分析】为了求曲线在点(1,1)处的切线方程，首先需要求出函数在点(1,1)处的导数，然后利用点斜式写出切线方程即可.

【详解】对所给方程两边对 x 求导数，将其中的 y 视为 x 的函数，有

$$y+xy'+\frac{2}{x}=4y^3y'$$

将 $x=1,y=1$ 代入上式，得 $y'(1)=1$. 故函数在点(1,1)处的导数为 1，即点(1,1)处切线的斜率为 1，再利用点斜式得，过点(1,1) 处的切线方程为

$$y-1=1\cdot(x-1)，即 x-y=0.$$

(3)【答案】 $\frac{(\ln 2)^n}{n!}$

【详解】 $y=f(x)$ 带佩亚诺余项的麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

求 $y=f(x)$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数相当于先求 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶导数值 $f^{(n)}(0)$，$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 就是麦克劳林公式中 x^n 项的系数.

$$y'=2^x\ln 2；\ y''=2^x(\ln 2)^2；\ \cdots\cdots\ y^{(n)}=2^x(\ln 2)^n \quad (归纳法及求导公式)$$

于是有 $y^{(n)}(0)=(\ln 2)^n$，故 $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$.

(4)【答案】$\dfrac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1)$

【详解】

方法 1：用定积分计算. 极坐标下平面图形的面积公式：$S=\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$，则

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{2a\theta}d\theta=\frac{1}{4a}e^{2a\theta}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1).$$

方法 2：用二重积分计算. D 表示该图形所占的区域，在极坐标下，利用二重积分面积公式：

$$\sigma=\iint_D \rho d\rho d\theta$$

所以 $$S=\iint_D d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{e^{a\theta}}rdr=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{2a\theta}d\theta=\frac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1).$$

(5)【答案】3

【分析】本题的可由矩阵$\alpha\alpha^T$的秩为 1，把其分解为一列乘一行的形式，而行向量一般可选第一行(或任一非零行)，列向量的元素则为各行与选定行的倍数构成．也可设 $A=\alpha\alpha^T$求出α，或利用 A^2或设$\alpha=[x_1\ x_2\ x_3]^T$，定出α等.

【详解】**方法 1**：观察得 A 的三个行向量成比列，其比为 1:1:1，故

$$A=\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix},$$

知$\alpha=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，于是$\alpha^T\alpha=\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=3.$

方法 2：$A=\alpha\alpha^T$， $A^2=\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=(\alpha^T\alpha)(\alpha\alpha^T)=\alpha^T\alpha A$ (1)

而 $$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3&3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}=3A \qquad (2)$$

比较(1)，(2)式，得$\alpha^T\alpha=3$.

方法 3：设 $\alpha=[x_1\ x_2\ x_3]^T$，$A=\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

故 $\alpha^T\alpha=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_1^2+x_2^2+x_3^2$（$A$ 的主对角元之和）

(6)【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【分析】 先化简分解出矩阵 B，再计算行列式 $|B|$ 或者将已知等式变形成含有因子 B 的矩阵乘积形式，而其余因子的行列式都可以求出即可．

【详解】**方法 1**：由 $A^2B-A-B=E$，知 $(A^2-E)B=A+E$，即 $(A+E)(A-E)B=A+E$，

易知矩阵 $A+E$ 可逆，于是有 $(A-E)B=E.$

再两边取行列式，得 $|A-E||B|=1$，

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2$，所以 $|B|=\dfrac{1}{2}$．

方法 2：由 $A^2B-A-B=E$，得

$$(A+E)(A-E)B=A+E$$

等式两端取行列式且利用矩阵乘积的行列式=行列式的乘积，得

$$|A+E||A-E||B|=|A+E|$$

约去 $|A+E|\neq 0$，得 $|B|=\dfrac{1}{|A+E|}=\dfrac{1}{2}$．

二、选择题

(1)【答案】(D)

【详解】**方法 1**：推理法

由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 存在并记为 A，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_nc_n}{b_n}=A$，这与 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 矛盾，故假设不成立，$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在． 所以选项(D) 正确．

方法 2：排除法

取 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\frac{n-1}{n}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，而 $a_1=1,b_1=0,\ a_1>b_1$，(A) 不正确；

取 $b_n=\frac{n-1}{n}$，$c_n=n-2$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，而 $b_1=0>-1=c_1$，(B) 不正确；

取 $a_n=\frac{1}{n}$，$c_n=n-2$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$，$(C)$ 不正确.

(2)【答案】(B)

【详解】$a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx=\dfrac{3}{2n}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\,d(1+x^n)$　　(第一类换元法)

$$=\frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{n}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}$$

可见 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\left\{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right\}^{-\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]\quad\text{(凑重要极限形式)}$$

$$=(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1\quad\text{(重要极限)}$$

所以选项 (B) 正确

(3)【答案】(A)

【详解】将 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 代入微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 $y'=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，得：

$$\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}=\frac{1}{\ln x}+\varphi(\ln x)\text{，即}\quad \varphi(\ln x)=-\frac{1}{\ln^2 x}$$

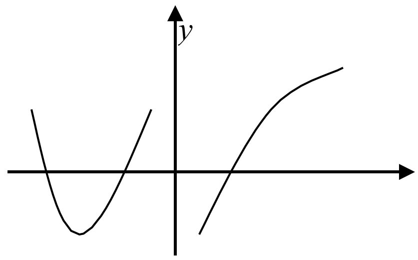
令 $\ln x=u$，有 $\varphi(u)=-\dfrac{1}{u^2}$，以 $u=\dfrac{x}{y}$ 代入，得

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y^2}{x^2}$$

故选项 (A) 正确.

(4)　【答案】(C)

【分析】函数的极值点可能是驻点(一阶导数为零)或导数不存在的点，极值点是极大值点还是极小值点可进一步由取极值的第一或第二充分条件判定.



【详解】根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个(导函数与 x 轴交点的个数)； $x=0$ 是导数不存在的点.

对 3 个一阶导数为零的点左右两侧导数符号均不一致，故必为极值点，其中第一个交点左右两侧导数符号由正变为负，是极大值点；第二个交点和第三个交点左右两侧导数符号由负变为正，是极小值点，则三个驻点中有两个极小值点，一个极大值点；

对导数不存在的点： $x=0$. 左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 $x=0$ 为极大值点.

故 $f(x)$ 共有两个极小值点和两个极大值点，应选(C).

(5)【答案】(B)

【详解】令 $\varphi(x)=\tan x-x$，有 $\varphi(0)=0,\varphi'(x)=\sec^2 x-1>0$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时 $\varphi(x)$ 单调递增，则 $\varphi(x)>0$，即 $\tan x>x>0$， $\frac{\tan x}{x}>1$， $\frac{x}{\tan x}<1$，由定积分的不等式性质知，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx>\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=\frac{\pi}{4}>\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx=I_2$$

可见有 $I_1>I_2$ 且 $I_2<\frac{\pi}{4}$.

(6)【分析】 本题为一般教材上均有的比较两组向量个数的定理：若向量组 I： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II： $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关. 或其逆否命题：若向量组 I： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II： $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，且向量组 I 线性无关，则必有 $r\le s$. 可见正确选项为(D). 本题也可通过举反例用排除法找到答案.

【详解】 用排除法：

$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 $\alpha_1=0\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2$，但 β_1,β_2 线性无关，排除(A)；

$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，则 α_1,α_2 可由 β_1 线性表示，但 β_1 线性无关，排除(B)；

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_1$ 可由 β_1,β_2 线性表示，但 α_1 线性无关，排除(C).

三【详解】函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则要求函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处既是左连续又是右连续，

即 $f(0^+)=f(0)=f(0^-)$.

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$$

(由于 $\ln(1+x)\sim x(x\to0)$，所以 $\ln(1+ax^3)\sim ax^3(x\to0)$)

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$ （$\frac{0}{0}$ 型极限，用洛必达法则）

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\lim_{x\to0^-}\sqrt{1-x^2}$$ (极限的四则运算)

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}$$ （$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}(-x^2)=-\frac{1}{2}x^2\quad(x\to0)$）

$$=-6a$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{\frac{x^2}{4}}$$

$$=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}=4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}$$

$$=4\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{2}=2\lim_{x\to0^+}(a^2e^{ax}+2)=2a^2+4$$

$f(0)=6.$

所以，$x=0$ 为 $f(x)$ 的连续点 $\Leftrightarrow f(0^+)=f(0^-)\Leftrightarrow -6a=6=2a^2+4$，得 $a=-1$；

所以，$x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点 $\Leftrightarrow -6a=2a^2+4\neq6$，即 $2a^2+6a+4=0$，但 $a\neq-1$

解得 $a=-2$，此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 为可去间断点.

四【分析】(i)变上限积分求导公式：$\frac{d}{dx}\left(\int_{v(x)}^{u(x)}f(t)dt\right)=f(u)u'(x)-f(v)v'(x)$；

(ii) 参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 的一阶导数: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$;

(iii) 若 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 二阶可导，函数的二阶导数公式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

【详解】设 $x=\varphi(t)=1+2t^2, y=\psi(t)=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du$，则

$$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)=4t;\quad \frac{dy}{dt}=\psi'(t)=\frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}=\frac{e\cdot t^2}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}=\frac{2et}{1+2\ln t};$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2et}{1+2\ln t}}{4t}=\frac{e}{2(1+2\ln t)}$$

所以 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{e}{2(1+2\ln t)}\right)'\cdot\frac{1}{4t}=\frac{-4e\frac{1}{t}}{2(1+2\ln t)^2}\cdot\frac{1}{4t}=-\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}$$

当 $x=9$ 时，由 $x=1+2t^2$ 及 $t>1$ 得 $t=2$，故

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}=-\left.\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}\right|_{t=2}=-\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}.$$

五【详解】**方法 1**：第二类换元法. 由于被积函数中含有根号 $\sqrt{1+x^2}$，作积分变量变换 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$，那么 $(1+x^2)^{\frac{3}{2}}=\sec^3 t$，$dx=\sec^2 tdt$，则

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{e^t\tan t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\sec^2 tdt=\int\frac{e^t\tan t}{\sec^3 t}\sec^2 tdt \qquad \text{三角变换公式}$$

$$=\int e^t\frac{\tan t}{\sec t}dt=\int e^t\sin tdt.$$

又 $\int e^t\sin tdt=-\int e^t d\cos t=-(e^t\cos t-\int e^t\cos tdt)$ 分部积分

$=-(e^t\cos t-\int e^t d(\sin t))=-(e^t\cos t-e^t\sin t+\int e^t\sin tdt)$ 分部积分

$=-e^t\cos t+e^t\sin t-\int e^t\sin tdt$,

故 $\int e^t\sin tdt=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C.$

由 $x=\tan t(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ 得 $t=\arctan x$，因此

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

方法 2：分部积分法

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} \qquad d(e^{\arctan x})=e^{\arctan x}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx \qquad \text{分部积分}$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} \qquad d(e^{\arctan x})=e^{\arctan x}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\left(\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int e^{\arctan x}\frac{-\frac{1}{2}\cdot 2x}{(1+x^2)^{3/2}}dx\right) \qquad \text{分部积分}$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$$

移项整理得；

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

六【详解】 (1) 将题中的 $\frac{dx}{dy}$ 与 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 变换成以 x 为自变量 y 为因变量的导数 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 来表示(即通常所说的反函数变量变换)，有

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'}, \quad \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原方程，得 $\quad y''-y=\sin x. \qquad\qquad (*)$

(2) 方程$(*)$所对应的齐次方程为 $y''-y=0$，特征方程为 $r^2-1=0$，根 $r_{1,2}=\pm 1$，因此

通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. 由于 $\lambda+i\omega$ 不是特征方程得根，所以设方程$(*)$的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x$$

则 $y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$，$y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$

代入方程(＊)，得：$-A\cos x-B\sin x-A\cos x-B\sin x=-2A\cos x-2B\sin x=\sin x$

解得 $A=0, B=-\frac{1}{2}$，故 $y^{*}=-\frac{1}{2}\sin x$. 从而 $y'-y=\sin x$ 的通解为

$$y=Y+y^{*}=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1, C_2=-1$． 故变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解为

$$y=e^{x}-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

且 $y(x)$ 的导函数 $y'(x)=e^{x}+e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x>0$，满足题设 $y'\neq 0$ 条件.

七【详解】讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^{4}x$ 的交点个数等价于讨论方程

$$\varphi(x)=\ln^{4}x-4\ln x+4x-k$$

在区间 $(0,+\infty)$ 内的零点问题，为此对函数求导，得

$$\varphi'(x)=\frac{4\ln^{3}x}{x}-\frac{4}{x}+4=\frac{4}{x}(\ln^{3}x-1+x).$$

可以看出 $x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的驻点，而且当 $0<x<1$ 时，$\ln^{3}x<0$，则 $\ln^{3}x-1+x<0$，而 $\frac{4}{x}>0$，有 $\varphi'(x)<0$，即 $\varphi(x)$ 单调减少；当 $x>1$ 时，$\ln^{3}x>0$，则 $\ln^{3}x-1+x>0$，而 $\frac{4}{x}>0$，有 $\varphi'(x)>0$，即 $\varphi(x)$ 单调增加，故 $\varphi(1)=4-k$ 为函数 $\varphi(x)$ 的惟一极小值即最小值.

① 当 $\varphi(1)=4-k>0$，即当 $k<4$ 时，$\varphi(x)\geq\varphi(1)>0$，$\varphi(x)$ 无零点，两曲线没有交点；

② 当 $\varphi(1)=4-k=0$，即当 $k=4$ 时，$\varphi(x)\geq\varphi(1)=0$，$\varphi(x)$ 有且仅有一个零点，即两曲线仅有一个交点；

③ 当 $\varphi(1)=4-k<0$，即当 $k>4$ 时，由于

$$\lim_{x\to0^{+}}\varphi(x)=\lim_{x\to0^{+}}[\ln x(\ln^{3}x-4)+4x-k]=+\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}[\ln x(\ln^{3}x-4)+4x-k]=+\infty$$

由连续函数的介值定理，在区间 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内各至少有一个零点，又因 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内分别是严格单调的，故 $\varphi(x)$ 分别各至多有一个零点. 总之，$\varphi(x)$ 有两个零点.

综上所述，当$k<4$时，两曲线没有交点；当$k=4$时，两曲线仅有一个交点；当 $k>4$ 时，两曲线有两个交点.

八【详解】(1) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

令 $X=0$，则它与 y 轴的交点为$(0,y+\frac{x}{y'})$. 由题意，此点与点 $P(x,y)$ 所连的线段被 x 轴平分，由中点公式得

$$\frac{1}{2}(y+y+\frac{x}{y'})=0\text{，即}2ydy+xdx=0.$$

积分得 $\frac{x^2}{2}+y^2=C$ (C 为任意常数)，代入初始条件 $y\big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$ 得 $C=\frac{1}{2}$，故曲线 $y=f(x)$ 的方程为

$$\frac{x^2}{2}+y^2=\frac{1}{2}\text{，即 }x^2+2y^2=1.$$

(2) 曲线 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$ 上的弧长为

$$l\overset{\text{弧长公式}}{=}\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\overset{x=\frac{\pi}{2}+t}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt.$$

另一方面，将(1)中所求得的曲线 $y=f(x)$ 写成参数形式，在第一象限中考虑，于是

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \end{cases}\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

于是该曲线的弧长为：

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t+\frac{1}{2}\cos^2 t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$\overset{t=\frac{\pi}{2}-u}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\cos^2 u}\,(-du)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 u}\,du$$

所以 $\sqrt{2}s=\frac{1}{2}l$，即 $s=\frac{\sqrt{2}}{4}l$.

九【详解】(1) 设在t时刻，液面的高度为 y，此时液面的面积为

$$A(t)\overset{\text{圆的面积公式}}{=}\pi\varphi^2(y),$$

由题设：液面的面积将以$\pi m^2/\min$的速率均匀扩大，可得

$$\frac{dA(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\pi\varphi^2(y)=\pi\text{，即}\frac{d}{dt}\varphi^2(y)=1$$

所以$\varphi^2(y)=t+C$，由题意，当$t=0$时$\varphi(y)=2$，代入求得$C=4$，于是得

$$\varphi^2(y)=t+4.$$

从而 $$t=\varphi^2(y)-4.$$

(2) 液面的高度为y时，液体的体积为$V(t)=\pi\int_0^y\varphi^2(u)du$，由题设：以$3m^3/\min$的速率向容器内注入液体，得

$$\frac{dV(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\pi\int_0^y\varphi^2(u)du\right)=3$$

所以 $$\pi\int_0^y\varphi^2(u)du=3t=3\varphi^2(y)-12.$$

上式两边对y求导，得

$$\pi\varphi^2(y)\overset{\text{变限积分求导}}{=}6\varphi(y)\varphi'(y),$$

即 $$\frac{d\varphi(y)}{dy}=\frac{\pi}{6}\varphi(y)$$

解此微分方程，得

$$\varphi(y)=Ce^{\frac{\pi}{6}y}\text{，其中}C\text{为任意常数，}$$

由$\varphi(0)=2$知$C=2$，故所求曲线方程为

$$x=2e^{\frac{\pi}{6}y}.$$

十【详解】(1) 因为极限$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$存在，且$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)=0$，故$\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0$

又$f(x)$在$[a,b]$上连续，从而$\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=f(a)$，则$f(a)=0$.

由于$f'(x)>0$，则$f(x)$在(a,b)内严格单调增加，所以$f(x)$在$x=a$处取最小值，即

$$f(x)>f(a)=0,x\in(a,b).$$

(2) 由要证明的形式知，要用柯西中值定理证明．取$F(x)=x^2$，$g(x)=\int_a^x f(t)dt$ $(a\le x\le b)$，则$g'(x)=f(x)>0$，则$F(x),g(x)$满足柯西中值定理的条件，于是在(a,b)

内存在点ξ，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt}=\left.\frac{(x^2)'}{(\int_a^x f(t)dt)'}\right|_{x=\xi}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$

即
$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(3) 在区间$[a,\xi]$上应用拉格朗日中值定理，得在(a,ξ)内存在一点η，使

$$f(\xi)-f(a)=f'(\eta)(\xi-a)$$

因$f(a)=0$，上式即$f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$，代入(2)的结论得，

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$$

即
$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx.$$

十一【分析】 已知 A 相似于对角矩阵，应先求出 A 的特征值，再根据特征值的重数与线性无关特征向量的个数相同，转化为特征矩阵的秩，进而确定参数a. 至于求 P，则是常识问题.

【详解】矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]=(\lambda-6)^2(\lambda+2),$$

故 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=6,\ \lambda_3=-2.$

由于 A 相似于对角矩阵Λ，故对应$\lambda_1=\lambda_2=6$应有两个线性无关的特征向量，即

$3-r(6E-A)=2$，于是有 $r(6E-A)=1$.

$$6E-A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

所以$a=0$. 于是对应于$\lambda_1=\lambda_2=6$的两个线性无关的特征向量可取为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

当$\lambda_3=-2$ 时，

$$-2E-A=\begin{bmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

解方程组$\begin{cases}2x_1+x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$ 得对应于$\lambda_3=-2$ 的特征向量$\xi_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$.

令 $P=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 P 可逆，并有 $P^{-1}AP=\Lambda$.

十二【分析】三条直线相交于一点，相当于对应线性方程组有唯一解，进而转化为系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2.

【详解】**方法 1**："必要性". 设三条直线l_1,l_2,l_3交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\bx+2cy=-3a,\\cx+2ay=-3b,\end{cases}\qquad(*)$$

有唯一解，故系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{bmatrix}$ 的秩均为 2，于是$|\overline{A}|=0$.

$$|\overline{A}|=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b+c&2(b+c+a)&-3(c+a+b)\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&2&-3\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=-6(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$$

$$=-6(a+b+c)\begin{vmatrix}1&0&0\\b&c-b&a-b\\c&a-c&b-c\end{vmatrix}=-6(a+b+c)\begin{vmatrix}c-b&a-b\\a-c&b-c\end{vmatrix}$$

$$=-6(a+b+c)[(c-b)(b-c)-(a-b)(a-c)]$$

$$=-6(a+b+c)(bc-c^2-b^2+bc-a^2+ac+ab-bc)$$

$$=6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-ab-bc)$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

由于三条直线互不相同，所以$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故

$$a+b+c=0.$$

“充分性”．由$a+b+c=0$，则从必要性的证明可知，$|\overline{A}|=0$，故秩$(\overline{A})<3$.

由于

$$\begin{vmatrix}a&2b\\b&2c\end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0,$$

故秩$(A)=2$．于是，秩(A)=秩($\overline{A}$)=2．因此方程组(*)有唯一解，即三直线l_1,l_2,l_3交于一点．

方法 2：“必要性”

设三直线交于一点(x_0,y_0)，则$\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\1\end{bmatrix}$为$BX=0$的非零解，其中$B=\begin{bmatrix}a&2b&3c\\b&2c&3a\\c&2a&3b\end{bmatrix}$.

所以$|B|=0$．而

$$|B|=\begin{vmatrix}a&2b&3c\\b&2c&3a\\c&2a&3b\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=-|\overline{A}|$$

$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],\text{(解法同方法 1)}$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故$a+b+c=0$.

“充分性”：考虑线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\bx+2cy=-3a,\\cx+2ay=-3b,\end{cases}\qquad(*)$$

将方程组(*)的三个方程相加，并由$a+b+c=0$. 可知，方程组(*)等价于方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases} \qquad (**)$$

因为 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2] = -[a^2+b^2+(a+b)^2] \neq 0$,

故方程组(**)有唯一解，所以方程组(*)有唯一解，即三直线l_1, l_2, l_3交于一点.