2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$__________

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为__________.

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2 x\ \cos^2 x dx=\right)$

(4) 过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为__________.

(5) 设方程 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多个解,则 $a=$___.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于　　(　　)

(A)0　　(B)1　　(C) $\begin{cases} 1, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases} 0, & |x|\le 1, \\ 1, & |x|>1, \end{cases}$

(2) 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，$x\sin x^n$ 是比 $\left(e^{x^2}-1\right)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于　　(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

(3) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为　　(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3

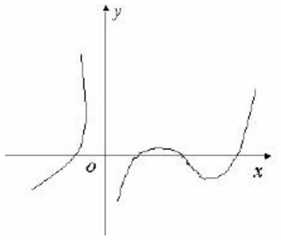
(4) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$, 则　　(　　)

(A)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$.

(B)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$.

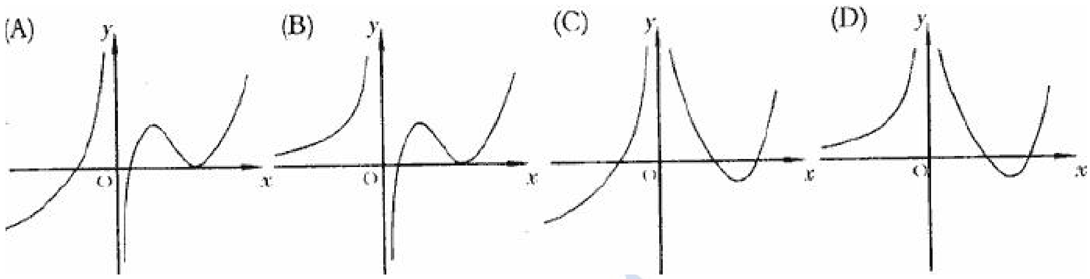
(C)在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)<x$.在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)>x$.

(D)在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)>x$.在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)<x$.



(5)设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如右图所示，

则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为　　　　(　)



三、(本题满分 6 分)

求 $\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

四、(本题满分 7 分)

求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

五、(本题满分 7 分)

设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geq 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值.(在直角坐标系下曲率公式为 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$)

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$.若 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$，

求 $f(x)$.

七、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$，且 $f(0)=0, g(0)=2$，

求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$

八、(本题满分 9 分)

设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)\ (x>0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的的截距，且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(1) 试求曲线 L 的方程

(2) 求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形面积最小.

九、(本题满分 7 分)

一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例常数 $K>0$.假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时？

十、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数, $f(0)=0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx.$

十一、(本题满分 6 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. 且矩阵 X 满足

$AXA+BXB=AXB+BXA+E$, 其中 E 是 3 阶单位阵，求 X.

十二、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_4$ 为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系， $\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+t\alpha_3$,

$\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4, \beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$, 试问实数 t 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也为 $AX=0$ 的一个基础解系.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】$-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

【详解】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{(x+2)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3-x-(1+x)}{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-\lim_{x\to1}\frac{2}{(x+2)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=-\frac{\lim\limits_{x\to1}2}{\lim\limits_{x\to1}(x+2)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-\frac{2}{(1+2)\left(\sqrt{3-1}+\sqrt{1+1}\right)}=-\frac{1}{3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

(2)【答案】 $x-2y+2=0$.

【详解】在等式$e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$两边对x求导, 其中 y 视为 x 的函数，得

$$e^{2x+y}(2x+y)'+\sin(xy)(xy)'=0，即e^{2x+y}\cdot(2+y')+\sin(xy)\cdot(y+xy')=0$$

将x=0, y=1代入上式, 得$e\cdot(2+y')=0$，即 $y'(0)=-2$. 故所求法线方程斜率$k=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$,

根据点斜式法线方程为：$y-1=\dfrac{1}{2}x$, 即 $x-2y+2=0$.

(3)【答案】 $\dfrac{\pi}{8}$

【分析】根据区域对称性与被积函数的奇偶性：设 $f(x)$ 在有界闭区域$[-a,a]$上连续，则

有 $$\begin{cases}\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx, & f(x)为偶函数\\ \int_{-a}^{a}f(x)dx=0, & f(x)为奇函数\end{cases},$$

【详解】由题设知

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2x\right)\cos^2xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2xdx$$

在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上，$x^3\cos^2 x$ 是奇函数，$\sin^2 x\cos^2 x$ 是偶函数，故

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos^2 x dx=0,\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 xdx,$$

所以，原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos^2 xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 xdx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin^2 2xdx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4xd4x=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{16}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}-0=\frac{\pi}{8}.$$

(4)【答案】 $y\arcsin x=x-\frac{1}{2}.$

【详解】

方法1：因为$\left(y\arcsin x\right)'=y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$，所以原方程 $y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 可

改写为 $\left(y\arcsin x\right)'=1,$

两边直接积分，得 $y\arcsin x=x+c.$

又由 $y(\frac{1}{2})=0$ 代入上式，有 $0\cdot\arcsin x=\frac{1}{2}+c$，解得$c=-\frac{1}{2}$.

故所求曲线方程为 $y\arcsin x=x-\frac{1}{2}$.

方法2：将原方程写成一阶线性方程的标准形式

$$y'+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}y=\frac{1}{\arcsin x}.$$

由一阶线性微分方程$\frac{dy}{dx}+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)$通解公式：

$$f(x)=e^{-\int P(x)dx}\left(C+\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

这里$P\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$，$Q\left(x\right)=\frac{1}{\arcsin x}$，代入上式得：

$$y=e^{-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx}\left[C+\int\frac{1}{\arcsin x}e^{\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx}dx\right]$$

$$= e^{-\int \frac{1}{\arcsin x} d\arcsin x}\left[C + \int \frac{1}{\arcsin x} e^{\int \frac{1}{\arcsin x} d\arcsin x} dx\right]$$

$$= e^{-\ln \arcsin x}\left[C + \int \frac{1}{\arcsin x} e^{\ln \arcsin x} dx\right]$$

$$= \frac{1}{\arcsin x}\left[C + \int \frac{\arcsin x}{\arcsin x} dx\right] = \frac{C}{\arcsin x} + \frac{x}{\arcsin x}$$

又由 $y(\frac{1}{2}) = 0$, 解得 $C = -\frac{1}{2}$. 故曲线方程为： $y\arcsin x = x - \frac{1}{2}$.

(5)【答案】 -2

【详解】**方法1**：利用初等行变换化增广矩阵为阶梯形,有

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \vdots & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{互换}]{1,3\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & -2 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 \\ a & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{分别加到2,3行}]{\text{1行的(-1),(-}a\text{)倍}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 1+2a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2行加到3行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & \vdots & 2(2+a) \end{bmatrix}$$

由非齐次线性方程组有无穷多解的充要条件：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，方程组 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) =< n$. 可见，只有当 $a=-2$ 时才有秩 $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < 3$，对应方程组有无穷多个解.

方法2: 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，方程组 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$ ，则方程组

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < 3$. 从而有 $|A| = 0$ ，即

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{\text{2,3行分别加到1行}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{\text{1行提出}(a+2)}{=\!=\!=} (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{1行}\times(-1)\text{分别加到2,3行}}{=\!=\!=} (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(a+2)\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+2)(a-1)^2 = 0,$$

则， $a = 1或a = -2$.

当 $a = 1$ 时，

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1行\times(-1)分别加到2,3行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

可见 $r(A) = 1 \neq r(\overline{A}) = 2$, 原方程组无解.

当 $a = -2$ 时，有

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1,3行互换} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2行-1行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 3 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1行\times2加到3行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 3 & -3 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行+2行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2行\div(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

可知， $r(\overline{A}) = r(A) = 2 < 3,$

故当 $a = -2$ 时，原方程组有无穷多解.

二、选择题

(1)【答案】(B)

【详解】因为 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$，所以在整个定义域内 $f(x) = 0或f(x) = 1$，所以

$|f(x)| \le 1$，于是 $f[f(x)] = 1$，从而 $f\{f[f(x)]\} = f(1) = 1$

(2)【答案】(B)

【详解】根据高阶无穷小的定义：如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，由题设当 $x \to 0$ 时， $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，所以

$$0 = \lim_{x\to0} \frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n} \,\underline{\underline{等价}}\, \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2}{x \cdot x^n} \,\underline{\underline{等价}}\, \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^n} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2} x^{3-n}$$

从而 n 应满足 $n \le 2$；

又由 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，所以根据高阶无穷小的定义有：

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{x\,\sin x^n}{e^{x^2}-1}\xlongequal{\text{等价}}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^n}{x^2}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}$$，从而 n 应满足 $n\geq 2$

综上，故正整数 $n=2$，故选(B)

(3)【答案】(C)

【详解】 $y=(x-1)^2(x-3)^2$，

所以 $y'=2(x-1)(x-3)^2+2(x-1)^2(x-3)=4(x-1)(x-2)(x-3)$

$$y''=4\big[(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)\big]$$

$$=4\left[x^2-5x+6+x^2-4x+3+x^2-3x+2\right]=4\left[3x^2-12x+11\right]$$

$$y'''=4\big[6x-12\big]=24\,(\,x-2)$$

令 $y''=0$，即 $3x^2-12x+11=0$，因为判别式：$\Delta=b^2-4ac=12^2-4\cdot3\cdot11=12>0$，所以 $y''=0$ 有两个不相等的实根，且 $y''(2)=3\cdot2^2-12\cdot2+11=-1\neq 0$，所以两个实根不为2，因此在使 $y''=0$ 这两点处，三阶导数 $y'''\neq 0$，(一般地，若 $f''(x_0)=0$，且 $f'''(x_0)\neq 0$，则点 $(x_0,f(x_0))$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点)，因此曲线有两个拐点，故选(C)

或根据 $y''=4\left[3x^2-12x+11\right]$ 是一条抛物线，且与 x 轴有两个不相同的交点，所以在两个交点的左右 y'' 符号不相同，满足拐点的定义，因此选(C)

(4)【答案】(A)

【详解】**方法 1**：令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F'(x)=f'(x)-1=f'(x)-f'(1)$

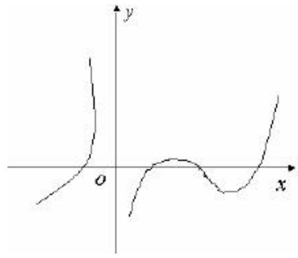
由于 $f'(x)$ 严格单调减少，因此当 $x\in(1-\delta,1)$ 时，$f'(x)>f'(1)$，则 $F'(x)=f'(x)-f'(1)>0$；当 $x\in(1,1+\delta)$ 时，$f'(x)<f'(1)$，则 $F'(x)=f'(x)-f'(1)<0$，且在 $x=1$ 处 $F'(1)=f'(1)-f'(1)=0$，

根据判定极值的第一充分条件：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心 δ 领域内可导，若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$

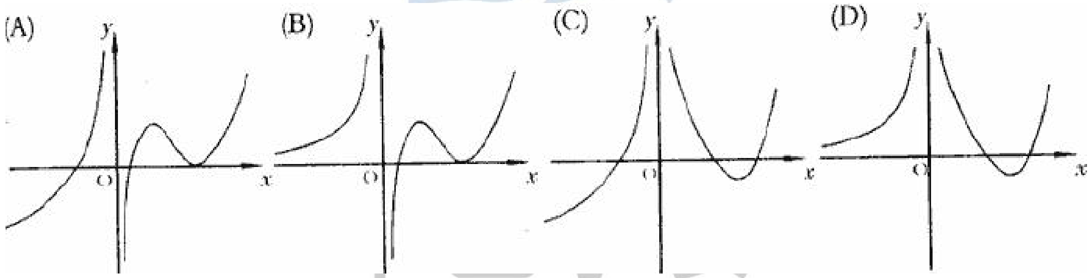
在 x_0 处取得极大值，知 $F(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值，即在在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $F(x)<F(1)=0$，也即 $f(x)<x$. 故选(A)

方法 2：排除法，取 $f(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{2}+x$，则 $f'(x)=-2(x-1)+1=-2x+3$，$f''(x)=-2<0$，所以满足题设在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$, 当 $x<1$ 时或 $x>1$ 时，均有 $f(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{2}+x<x$，因此可以排除(B)、(C)、(D)，选(A)

(5) 【答案】(D)



【详解】从题设图形可见，在 y 轴的左侧，曲线 $y=f(x)$ 是严格单调增加的，因此当 $x<0$ 时，一定有 $f'(x)>0$，对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，由此可排除(A)，(C)；



又 $y=f(x)$ 的图形在 y 轴右侧靠近 y 轴部分是单调增， 所以在这一段内一定有 $f'(x)>0$，对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，进一步可排除(B)，故正确答案为(D).

三【详解】作积分变量变换，令 $x=\tan u$, 则 $dx=\sec^2 u du$,

$$原式=\int\frac{\sec^2 u du}{(2\tan^2 u+1)\sqrt{\tan^2 u+1}}=\int\frac{\sec^2 u du}{(2\tan^2 u+1)\sec u}$$

$$=\int\frac{du}{(2\tan^2 u+1)\cos u}=\int\frac{du}{\left(\frac{2\sin^2 u}{\cos^2 u}+1\right)\cos u}=\int\frac{\cos^2 u du}{(2\sin^2 u+\cos^2 u)\cos u}$$

$$=\int\frac{\cos u du}{2\sin^2 u+\cos^2 u}=\int\frac{\cos u du}{\sin^2 u+1}=\int\frac{d\sin u}{\sin^2 u+1}$$

$$=\arctan(\sin u)+C \xlongequal[\tan u = x]{\sin u=\frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C$$

四【分析】应先求出 $f(x)$ 的表达式，再讨论它的间断点，首先明确间断点的类型分为两大类：第一类间断点和第二类间断点，第一类间断点又可分为：可去间断点(左右极限存在且相等的间断点)和跳跃间断点(左右极限存在但不相等的间断点)；第二类间断点又可分为：无穷间断点(有一个极限为无穷的间断点)和振荡间断点(极限值在某个区间变动无限多次).

【详解】由 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}e^{\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}}=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)}$

又 $\lim\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)=\lim\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(1+\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)$

$$=\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)=\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\left(\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}$$

所以 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)}=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)}=e^{\frac{x}{\sin x}}$

由 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$ 的表达式，可以看出自变量 x 应满足 $\sin x\neq 0$，从而 $x\neq k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

当 $x\to 0$ 时，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=e^{1}=e,$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点(左右极限相等，又进一步可知是可去间断点)；

对于非零整数k，

$$\lim_{x\to k\pi^-}f(x)=\lim_{x\to k\pi^-}e^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to k\pi^-}\frac{x}{\sin x}}\xlongequal{\sin x\to 0}\infty,$$

故 $x=k\pi,\ k=\pm1,\pm2,\cdots$为 $f(x)$ 的第二类间断点(无穷间断点)

五【解答】由 $y=\sqrt{x}$，有 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$，抛物线在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{\left[1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right|}=\frac{\left[1+\frac{1}{4x}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

若已知平面曲线 $\overset{\frown}{AM}$ 的显式表示为 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$，则弧长为 $s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数.

根据上述结论，所以抛物线上 $\overset{\frown}{AM}$ 的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}dx=\int_1^x\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx$$

$$\frac{d\rho}{ds}=\frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}}=\frac{\left[\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]'}{\left(\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx\right)'}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{3(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\sqrt{x}}{(4x+1)^{\frac{1}{2}}}=6\sqrt{x}$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dx}}=\frac{d}{dx}(6\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\left(\int\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx\right)'}$$

$$=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+4x}}=\frac{6}{\sqrt{1+4x}}.$$

因此 $$3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2=3\cdot\frac{1}{2}(1+4x)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{1+4x}}-\left(6\sqrt{x}\right)^2=9(1+4x)-36x=9$$

六【详解】$f(x)$ 的反函数是 $g(x)$，根据反函数的性质有 $g(f(x))=x$，$\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$ 两边对 x 求导，有

$$\left(\int_0^{f(x)}g(t)dt\right)'=\left(x^2e^x\right)'\Rightarrow g\left[f(x)\right]f'(x)=x^2e^x+2xe^x$$

又 $g(f(x))=x$，所以

$$xf'(x)=x^2e^x+2xe^x\Rightarrow\ f'(x)=xe^x+2e^x,\qquad x\in(0,+\infty)$$

两边积分 $\int f'(x)dx=\int\left(xe^x+2e^x\right)dx \Rightarrow f(x)=\int xe^xdx+\int 2e^xdx$

$$\Rightarrow f(x)=\int xde^x+2e^x \Rightarrow f(x)\ \underline{\underline{分部}}\ xe^x-\int e^xdx+2e^x$$

$$\Rightarrow f(x)=xe^x-e^x+2e^x+C \Rightarrow f(x)=xe^x+e^x+C.$$

由于题设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可导，所以在 $x=0$ 处连续，故

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(xe^x+e^x+C\right)=1+C=0,$$

所以$C=-1$，于是

$$f(x)=xe^x+e^x-1,\qquad x\in[0,+\infty)$$

七【详解】由 $f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$，得 $f''(x)=g'(x)=2e^x-f(x)$，即

$$f''(x)+f(x)=2e^x$$

此为二阶常系数线性非齐次方程，且右端呈 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型(其中 $P_m(x)=2,\ \lambda=1$)，

对应的齐次方程为 $f''(x)+f(x)=0$，特征方程为$r^2+1=0$，对应的特征值为$r=\pm i$，

于是齐次方程的通解为： $y=C_1\cos x+C_2\sin x$，

因为$\lambda=1\neq r$，所以设特解为 $y^*=ae^x$ (a 为实数)，$\left(y^*\right)''=ae^x$，

代入 $f''(x)+f(x)=2e^x$， $ae^x+ae^x=2e^x$，所以$a+a=2$，即$a=1$，从而特解 $y^*=e^x$，

非齐次方程的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x$，

又 $f(0)=0$，所以，$f(0)=C_1\cos0+C_2\sin0+e^0=0\Rightarrow C_1+1=0\Rightarrow C_1=-1$

又，$f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x+e^x$，$f'(0)=g(0)=2$，

所以，$f'(0)=-C_1\sin0+C_2\cos0+e^0=C_2+1=2\Rightarrow C_2=1$，

所以原方程的解为： $f(x)=\sin x-\cos x+e^x$

以下计算积分，有两个方法：

方法 1：$\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^\pi\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx$

$$\xlongequal{f'(x)=g(x)}\int_0^\pi \frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^\pi\left[\frac{f(x)}{1+x}\right]'dx=\int_0^\pi d\frac{f(x)}{1+x}$$

$$=\frac{f(x)}{1+x}\bigg|_0^\pi=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-\frac{f(0)}{1+0}=\frac{\sin\pi-\cos\pi+e^\pi}{1+\pi}-f(0)=\frac{1+e^\pi}{1+\pi}$$

方法 2：$\displaystyle\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^\pi\frac{g(x)}{1+x}dx-\int_0^\pi\frac{f(x)}{(1+x)^2}dx$

$$=\int_0^\pi\frac{g(x)}{1+x}dx+\int_0^\pi f(x)\left(\frac{1}{1+x}\right)'dx=\int_0^\pi\frac{g(x)}{1+x}dx+\int_0^\pi f(x)d\frac{1}{1+x}$$

$$\xlongequal{分部}\int_0^\pi\frac{g(x)}{1+x}dx+\frac{f(x)}{1+x}\bigg|_0^\pi-\int_0^\pi\frac{f'(x)}{1+x}dx$$

$$\xlongequal{g(x)=f'(x)}\int_0^\pi\frac{g(x)}{1+x}dx+\frac{f(x)}{1+x}\bigg|_0^\pi-\int_0^\pi\frac{g(x)}{1+x}dx$$

$$=\frac{f(x)}{1+x}\bigg|_0^\pi=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-\frac{f(0)}{1+0}=\frac{\sin\pi-\cos\pi+e^\pi}{1+\pi}-f(0)=\frac{1+e^\pi}{1+\pi}$$

八【详解】(1) 设曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$，则 $Y=-xy'+y$，即它在 y 轴上的截距为 $-xy'+y$，

根据两点 $(x,y),(x_0,y_0)$ 距离公式 $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，所以原点到点 $P(x,y)$ 的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$，由题设 $P(x,y)\ (x>0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，所以：$-xy'+y=\sqrt{x^2+y^2}$，　$(x>0)$，

即　$y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$，　$(x>0)$

此为一阶齐次方程，按规范方法解之，命 $y=ux$，则 $\dfrac{dy}{dx}=u+xdu$，代入，方程变为：

$$u+x\frac{du}{dx}=u-\frac{x\sqrt{u^2+1}}{x}\Rightarrow x\frac{du}{dx}=-\sqrt{u^2+1}\Rightarrow\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=-\frac{dx}{x}$$

积分得　$\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=-\ln cx\Rightarrow u+\sqrt{1+u^2}=\frac{C}{x}$

把$u=\dfrac{y}{x}$代入上式，得

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{C}{x}\Rightarrow y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

由题设曲线经过点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，代入得$0+\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+0}=C$，则$C=\dfrac{1}{2}$，故所求方程为：

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}，即\ y=\frac{1}{4}-x^2.$$

(2) 由(1)知 $y=\dfrac{1}{4}-x^2$，则 $y'=-2x$，点 $P(x,y)=P\left(x,\dfrac{1}{4}-x^2\right)$，所以在点 P 处的切线方程为：$Y-\left(\dfrac{1}{4}-x^2\right)=-2x\left(X-x\right)$，分别令 $X=0$，$Y=0$，解得在 y 轴，x 轴上的截距分别为 $x^2+\dfrac{1}{4}$和$\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{8x}$.

此切线与两坐标轴围成的三角形面积为：

$$A(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{8x}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64x}\left(4x^2+1\right)^2，\ x>0$$

由于该曲线在第一象限中与两坐标轴所围成的面积为定值，记 S_0，于是题中所要求的面积为：$S(x)=A(x)-S_0=\dfrac{1}{64x}\left(4x^2+1\right)^2-S_0$，

求最值点时与 S_0 无关，以下按微分学的办法求最值点.

$$S'(x)=\left(\frac{1}{64x}\left(4x^2+1\right)^2-S_0\right)'=\frac{2\cdot 8x\left(4x^2+1\right)-\left(4x^2+1\right)^2}{64x^2}$$

$$=\frac{2\cdot 8x\left(4x^2+1\right)x-\left(4x^2+1\right)^2}{64x^2}=\frac{\left(4x^2+1\right)\left(12x^2-1\right)}{64x^2}$$

令$S'(x)=0$得$x=\dfrac{1}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，当$0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时，$S'(x)<0$；当$x>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时，$S'(x)>0$，

根据极值存在的第一充分条件：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心δ 领域内可导，若 $x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)$时，$f'(x)>0$，而$x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$x_0$处取得极大值，知：$x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$是$S(x)$在$x>0$处的唯一极小值点，即最小值点，

于是所求切线方程为：

$$Y-\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{6}\left(X-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)，即 Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}$$

九【详解】

方法 1：半球形雪堆在时刻t时设其半径为r，则半球体积$V=\frac{2}{3}\pi r^3$，侧面积 $S=2\pi r^2$. 由题设体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，知：$\frac{dV}{dt}=-kS$，

由于r是t的函数，$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)=2\pi r^2\frac{dr}{dt}$，代入上式，得：$2\pi r^2\frac{dr}{dt}=-kS$，

即 $2\pi r^2\frac{dr}{dt}=-k\cdot 2\pi r^2$，从而 $dr=-kdt$，$r\big|_{t=0}=r_0$.

积分得$r=-kt+c$，把$r\big|_{t=0}=r_0$代入，得$c=r_0$，所以 $r=-kt+r_0$.

又半径为 r_0的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$，即

$V\big|_{t=3}=V_0-\frac{7}{8}V_0=\frac{1}{8}V_0$，其中$V_0$表示$t=0$时的$V$. 以$V$的公式代入上式，为

$$V\big|_{t=3}=\frac{2}{3}\pi r^3\bigg|_{t=3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3\bigg|_{t=0}$$

将$r=-kt+r_0$代入上式，两边约去 $\frac{2}{3}\pi$，得：

$$\left(-kt+r_0\right)^3=\frac{1}{8}r_0^3，即 -kt+r_0=\frac{1}{2}r_0$$

从而求得：$k=\frac{1}{6}r_0$，于是 $r=-kt+r_0=-\frac{1}{6}r_0t+r_0=r_0\left(1-\frac{t}{6}\right)$，当$t=6$时 $r=0$，雪堆全部融化完.

方法 2：半球形雪堆在时刻t时设其半径为r，则半球体积$V=\frac{2}{3}\pi r^3$，侧面积 $S=2\pi r^2$，

联立$V=\frac{2}{3}\pi r^3$，$S=2\pi r^2$消去r，得：$S=\sqrt[3]{18\pi V^2}$

由题设体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，知：$\frac{dV}{dt}=-kS$，从而推知

$$\frac{dV}{dt}=-k\sqrt[3]{18\pi V^2},\ V\big|_{t=0}=V_0$$

分离变量 $\frac{dV}{V^{\frac{2}{3}}}=-k\sqrt[3]{18\pi}dt$，积分：$3V^{\frac{1}{3}}=-k\sqrt[3]{18\pi}t+c$，把 $V\big|_{t=0}=V_0$ 代入，

$c=3V_0^{\frac{1}{3}}$，所以，$3V^{\frac{1}{3}}=3V_0^{\frac{1}{3}}-k\sqrt[3]{18\pi}\,t$.

又由 $V\big|_{t=3}=V_0-\frac{7}{8}V_0=\frac{1}{8}V_0$，代入上式 $\frac{3}{2}V_0^{\frac{1}{3}}=3V_0^{\frac{1}{3}}-3k\sqrt[3]{18\pi}$，得 $k=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V_0}{18\pi}}$，

故 $3V^{\frac{1}{3}}=3V_0^{\frac{1}{3}}-k\sqrt[3]{18\pi}\,t=3V_0^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V_0}{18\pi}}\sqrt[3]{18\pi}\,t=3V_0^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}V_0^{\frac{1}{3}}t$.

命 $V=0$，解得：$t=6$，即雪堆全部融化需 6 小时.

十【应用定理】闭区间上连续函数的介值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\neq f(b)$，则对 $f(a)$与$f(b)$ 之间的任何数η，必存在c ($a<c<b$)，使得 $f(c)=\eta$.

【详解】(1)麦克劳林公式其实就是泰勒公式中，把函数在零点展开.

$f(x)$ 的拉格朗日余项一阶麦克劳林公式为：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

其中ξ位于0 和 x 为端点的开区间内，$x\in[-a,a]$.

(2)**方法 1**：将 $f(x)$ 从$-a$到a积分 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}f'(0)xdx+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx.$

而 $$\int_{-a}^{a}f'(0)xdx=f'(0)\int_{-a}^{a}xdx=f'(0)\times\frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{a}=0$$

从而有 $$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx.$$

因 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，故有 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上存在最大值 M，最小值m (由闭区间上的连续函数必有最大值和最小值)，即

$$m=\min_{[-a,a]}f''(x),M=\max_{[-a,a]}f''(x),$$

易得 $m\le f''(x)\le M,x\in[-a,a]$.

因此 $$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\le\frac{1}{2}M\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{1}{2}M\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a}=\frac{Ma^3}{3},$$

同理 $$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\ge\frac{1}{2}m\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{1}{3}ma^3.$$

因此 $$m\le\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx\le M.$$

由连续函数介值定理知，存在$\eta\in[-a,a]$，使

$$f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)dx\text{，即}a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx .$$

方法 2 ：观察要证的式子，做变限函数：$F(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$，易得 $F(0)=0$，

$$F'(x)=f(x)+f(-x)\ (\text{变限积分求导})$$

$$F''(x)=\big(f(x)+f(-x)\big)'=f'(x)-f'(-x)$$

$$F'''(x)=\big(f'(x)-f'(-x)\big)'=f''(x)+f''(-x)$$

则有 $F'(0)=f(0)+f(-0)=0+0=0$

$$F'(0)=f'(0)-f'(-0)=f'(0)-f'(0)=0$$

将它展开成 2 阶带拉格朗日余项麦克劳林公式：

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2}F''(0)x^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi)x^3$$
$$=0+0+\frac{1}{6}F'''(\xi)x^3=\frac{1}{6}(f''(\xi)+f''(-\xi))x^3$$

其中 $\xi\in(0,x)$， $x\in[-a,a]$

由于 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则由连续函数介值定理，存在 $\eta\in[-\xi,\xi]$，使

$$f''(\eta)=\frac{1}{2}(f''(\xi)+f''(-\xi))\quad (\text{因为}\frac{1}{2}(f''(\xi)+f''(-\xi))\in f''(x),x\in[-a,a])$$

于是有，存在 $\eta\in(-a,a)$，使

$$F(x)=0+0+\frac{1}{6}F'''(\xi)x^3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(f''(\xi)+f''(-\xi))x^3=\frac{1}{3}f''(\eta)x^3$$

把 $x=a$ 代入 $F(x)$ 有：

$$F(a)=\frac{1}{3}f''(\eta)a^3\text{，即}\int_{-a}^{a} f(x)dx=\frac{a^3}{3}f''(\eta)\qquad \eta\in(-a,a)$$

即 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx\qquad \eta\in(-a,a)$

十一【详解】题设的关系式

$$AXA+BXB=AXB+BXA+E\Rightarrow AXA+BXB-AXB-BXA=E$$

$$\Rightarrow (AXA-AXB)+(BXB-BXA)=E\Rightarrow AX(A-B)+BX(B-A)=E$$

$$\Rightarrow AX(A-B)-BX(A-B)=E\Rightarrow (AX-BX)(A-B)=E$$

即 $\qquad (A-B)X(A-B)=E.$

其中，$\qquad A-B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

因为 $\qquad |A-B|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，

故由n阶矩阵A可逆的充要条件$|A|\neq 0$，知矩阵$A-B$可逆，用初等行变换求$(A-B)^{-1}$：

$$(A-E,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{加到1, 2行}]{\text{3行分别}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{2行加到1行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

故而 $\qquad (A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,

于是，等式$(A-B)X(A-B)=E$两边左、右乘 $(A-B)^{-1}$ 可得

$$X=\left[(A-B)^{-1}\right]^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

十二【详解】由题设知，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$均为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性组合，齐次方程组当有非零解时，解向量的任意组合仍是该齐次方程组的解向量，所以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$均为$Ax=0$的解.

下面证明$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关. 设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0 \qquad (*)$$

把 $\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\ \beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\ \cdots,\ \beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$, 代入整理得,

$$(t_1k_1+t_2k_s)\alpha_1+(t_2k_1+t_1k_2)\alpha_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\alpha_s=0$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，由线性无关的定义，知$(*)$ 中其系数全为零，即

$$\begin{cases} t_1k_1+t_2k_s=0 \\ t_2k_1+t_1k_2=0 \\ \qquad\vdots \\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(*)} \begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & t_1 & 0 & \cdots & -\frac{t_2^2}{t_1} \\ 0 & 0 & t_1 & \cdots & \frac{t_2^3}{t_1^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+(-1)^{s+1}\frac{t_2^s}{t_1^{s-1}} \end{vmatrix} = t_1^{s-1}\left(t_1+(-1)^{s+1}\frac{t_2^s}{t_1^{s-1}}\right)=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s$$

($(*)$变换：把原行列式第i行乘以$-\frac{t_2}{t_1}$加到第$i+1$行，其中$i=1,\cdots,s-1.$)

由齐次线性方程组只有零解得充要条件，可见，当$t_1^s+(-1)t_2^s\neq 0$，，即$t_1^s\neq(-t_2)^s$，即当s为偶数，$t_1\neq\pm t_2$；当s为奇数，$t_1\neq t_2$时，上述方程组只有零解$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，因此向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，

故当$\begin{cases} s=2n, & t_1\neq\pm t_2 \\ s=2n+1, & t_1\neq t_2 \end{cases}$ 时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也是方程组 $Ax=0$ 的基础解系.