2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} =$ ________.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程$2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $dy\big|_{x=0} =$ ________.

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$ ________.

(4) 曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 ________.

(5) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$，$E$ 为 4 阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$ 则

$(E+B)^{-1}=$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　　）

(A) $a<0,b<0$.　　　　(B) $a>0,b>0$.

(C) $a\le 0,b>0$.　　　　(D) $a\ge 0,b<0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则（　　）

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C)点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(3) 设 $f(x),g(x)$ 是大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当$a<x<b$ 时，有（　）

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$　　　　(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

(4) 若 $\lim\left(\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{\ }\right)=0$，则 $\lim\dfrac{6+f(x)}{\ }$ 为　(　)

(A)0.　　(B)6.　　(C)36.　　(D) ∞.

(5) 具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^{x}$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是 (　)

(A) $y'''-y''-y'+y=0$.　　(B) $y'''+y''-y'-y=0$.

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$.　　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

三、(本题满分 5 分)

设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)dx$.

四、(本题满分 5 分)

设 xoy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 及直线 $l: x+y=t(t\ge 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $\int_0^x S(t)dt,(x\ge 0)$.

五、(本题满分 5 分)

求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{n}(0)(n\ge 3)$.

六、(本题满分 6 分)

设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$，

(1)当 n 为正整数，且 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$ 时，证明 $2n\le S(x)<2(n+1)$；

(2)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

七、(本题满分 7 分)

某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$，已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标.为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$ 问至多需要经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内(注：设湖水中 A 的浓度是均匀的)

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0, \int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$，试证明：在 $(0,\pi)$

内至少存在两个不同的点ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

九、(本题满分 7 分)

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中$\alpha(x)$是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

十、(本题满分 8 分)

设曲线 $y=ax^2\,(a>0,x\geq 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形.问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？最大体积是多少？

十一、(本题满分 8 分)

函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,$$

(1) 求导数 $f'(x)$；

(2) 证明：当 $x\geq 0$ 时，成立不等式$e^{-x}\leq f(x)\leq 1$成立

十二、(本题满分 6 分)

设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix},A=\alpha\beta^T,B=\beta^T\alpha$.其中 β^T是 β 的转置，

求解方程$2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma$

十三、(本题满 7 分)

已知向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$

具有相同的秩，且 β_3 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，求$a,b$的值.

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】$-1|6$

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln\left(1+2x^{3}\right)}\overset{\ln\left(1+2x^{3}\right)\sim 2x^{3}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^{3}}\overset{\text{洛}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^{2}}-1}{6x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^{2}}{6x^{2}\left(1+x^{2}\right)}=-\dfrac{1}{6}$

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程$2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $dy\big|_{x=0}=$ ________.

【答案】$(\ln 2-1)dx$

【详解】

方法 1：对方程$2^{xy}=x+y$ 两边求微分，有

$$2^{xy}\ln 2\cdot(xdy+ydx)=dx+dy.$$

由所给方程知，当 $x=0$ 时 $y=1$. 将$x=0$， $y=1$代入上式，有$\ln 2\cdot dx=dx+dy$.

所以，$dy\big|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$.

方法 2：两边对 x 求导数，视 y 为该方程确定的函数，有

$$2^{xy}\ln 2\cdot(xy'+y)=1+y'.$$

当$x=0$时 $y=1$，以此代入，得 $y'=\ln 2-1$，所以$dy\big|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$.

(3)【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【详解】由于被积函数在 $x=2$ 处没有定义，则该积分为广义积分.对于广义积分，可以先按照不定积分计算，再对其求极限即可.

作积分变量替换，令$\sqrt{x-2}=t, x-2=t^{2}dx=2tdt,$

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=\int_{0}^{+\infty}\frac{2t}{(t^{2}+9)t}dt=2\cdot\frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

(4)【答案】 $y=2x+1$

【公式】 $y=kx+b$ 为 $y=f(x)$ 的斜渐近线的计算公式： $k=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\dfrac{y}{x}, b=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}[f(x)-kx]$

【详解】$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\dfrac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}=2,$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]\ \underline{\underline{令\frac{1}{x}=u}}\ \lim_{u\to0^+}(\frac{2e^u-2}{u}-e^u)$$

$$=\lim_{u\to0^+}(\frac{2(e^u-1)}{u}-e^u)\ \underline{\underline{e^u-1\sim u}}\ \lim_{u\to0^+}(\frac{2u}{u}-e^u)=2-1=1$$

所以，$x\to+\infty$ 方向有斜渐近线 $y=2x+1$．当 $x\to-\infty$ 时，类似地有斜渐近线 $y=2x+1$．

总之，曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 $y=2x+1$.

(5)【答案】$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}$

【详解】先求出$(E+B)^{-1}$然后带入数值，由于 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，所以

$$\begin{aligned}(E+B)^{-1}&=\left[E+(E+A)^{-1}(E-A)\right]^{-1}\\&=\left[(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A)\right]^{-1}\\&=\left[2(E+A)^{-1}\right]^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\-2&4&0&0\\0&-4&6&0\\0&0&-6&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

二、选择题

(1)【答案】D

【详解】排除法：

如果 $a<0$，则在$(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 的分母 $a+e^{bx}$ 必有零点 x_0，从而 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续，与题设不符.不选(A)，若$b>0$，则无论 $a=0$ 还是 $a\neq0$ 均有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, 与题设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ 矛盾，不选(B) 和(C) .故选(D) .

(2)【答案】C

【定理应用】判断极值的第二充分条件：设函数 $f(x)$ 在 x_0 出具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么：(1) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2)当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

【详解】令等式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 中 $x=0$，得 $f''(0)=0-[f'(0)]^2=0$，无法利用判断极值的第二充分条件，故无法判断是否为极值或拐点.

再求导数(因为下式右边存在，所以左边也存在)：

$$f'''(x)=(x-[f'(x)]^2)'=1-2f'(x)f''(x)$$

以 $x=0$ 代入，有 $f'''(0)=1$，所以

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=1.$$

从而知，存在 $x=0$ 去心邻域，在此去心邻域内，$f''(x)$ 与 x 同号，于是推知在此去心邻域内当 $x<0$ 时曲线 $y=f(x)$ 是凸的，在此去心临域内 $x>0$ 时曲线 $y=f(x)$ 是凹的，点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，选(C).

(3)【答案】A

【分析】由选项答案可知需要利用单调性证明，关键在于寻找待证的函数. 题设中已知

$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,$ 想到设函数为相除的形式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

【详解】

设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则 $\left(F(x)\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0,$

则 $F(x)$ 在 $a<x<b$ 时单调递减，所以对 $\forall a<x<b$，$F(a)>F(x)>F(b)$，即

$$\frac{f(a)}{g(a)}>\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$$

得 $f(x)g(b)>f(b)g(x), a<x<b$，(A) 为正确选项.

(4)【答案】(C)

【分析】本题有多种解法：(1)将含有 $f(x)$ 的要求极限的表达式凑成已知极限的表达式，或

反之；(2)利用极限与无穷小的关系，从已知极限中解出 $f(x)$ 代入要求极限式中；(3)将具体函数用佩亚诺余项泰勒公式展开化简原极限.

【详解】

方法 1： 凑成已知极限

$$\frac{6+f(x)}{x^2}=\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\frac{6x-\sin 6x+\sin 6x+xf(x)}{x^3}$$

而
$$\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6(1-\cos 6x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}=36$$

$$\left(\text{由于}1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\Rightarrow 1-\cos(6x)\sim\frac{1}{2}(6x)^2\right)$$

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x+\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=36+0=36$$

方法 2： 由极限与无穷小关系，由已知极限式解出

$$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=a,\quad \lim_{x\to0}a=0$$

从而
$$\sin 6x+xf(x)=ax^3\Rightarrow f(x)=\frac{ax^3-\sin 6x}{x}$$

$$\frac{6+f(x)}{x^2}=\frac{6+\frac{ax^3-\sin 6x}{x}}{x^2}=\frac{ax^3+6x-\sin 6x}{x^3}$$

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{ax^3+6x-\sin 6x}{x^3}\overset{\text{极限的四则运算}}{=}\lim_{x\to0}a+\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$$

$$=0+\lim_{x\to0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}=36$$

方法 3： 将$\sin 6x$ 在 $x=0$ 处按佩亚诺余项泰勒公式展开至 x^3 项：

$$\sin 6x=6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)=6x-36x^3+o(x^3),$$

于是
$$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\frac{6x+xf(x)-36x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{6+f(x)}{x^2}-36+\frac{o(x^3)}{x^3},$$

从而
$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+36-\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0+36-0=36.$$

(5)【答案】B

【详解】由特解 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}$，对照常系数线性齐次微分方程的特征方程、特征根与解的对应关系知道，$r_2 = -1$ 为特征方程的二重根；由 $y_3 = 3e^x$ 可知 $r_1 = 1$ 为特征方程的单根，因此特征方程为

$$(r-1)(r+1)^2 = r^3 + r^2 - r - 1 = 0,$$

由常系数齐次线性微分方程与特征方程的关系，得该微分方程为

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

三【详解】

方法 1：为了求不定积分，首先需要写出 $f(x)$ 的表达式.为此，令 $\ln x = t$，有 $x = e^t$

$$f(t) = f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$$

$$\int f(x)dx = \int e^{-x}\ln(1+e^x)dx = -\int \ln(1+e^x)de^{-x}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}dx \qquad \text{分部积分}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx \qquad \text{拆项}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int\left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int 1dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int 1dx - \int \frac{de^x}{1+e^x}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int 1dx - \int \frac{d(e^x+1)}{1+e^x}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C$$

方法 2：作积分变量替换，命 $x = \ln t$，

$$\int f(x)dx = \int f(\ln t)\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt = -\int \ln(1+t)d\left(\frac{1}{t}\right)$$

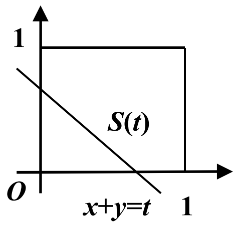
$$= -\left[\frac{\ln(1+t)}{t} - \int \frac{1}{t(1+t)}dt\right] \qquad \text{分部积分}$$

$$= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt \qquad \text{部分分式求和}$$

$$= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{1+t}\,d(1+t) = -\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln t - \ln(1-t) + C$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^{x}) + x - \ln(1+e^{x}) + C.$$

四【详解】先写出面积 $S(t)$ 的(分段)表达式，



当$0<t<1$时，图形为三角形，利用三角形的面积公式：

$$S(t) = \frac{1}{2}t^{2};$$

当$1<t<2$时，图形面积可由正方形面积减去小三角形面积，其中由于 $x+y=t$ 与 $y=1$交点的纵坐标为$t-1$，于是，小三角形的边长为：$1-(t-1)=2-t$，所以

$$S(t) = 1-\frac{1}{2}(2-t)^{2} = 1-\frac{1}{2}(t^{2}-4t+4) = -\frac{1}{2}t^{2}+2t-1;$$

当$t>2$ 时，图形面积就是正方形的面积： $S(t)=1$，

则

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^{2}, & 0\le t\le 1,\\ 1-\frac{1}{2}(2-t)^{2}, & 1<t\le 2,\\ 1, & 2<t.\end{cases}$$

当$0\le x\le 1$时，$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \frac{1}{2}t^{2}\,dt = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3}}{3}\right)\Big|_0^x = \frac{x^{3}}{6}$；

当$1<x\le 2$时，$\int_0^x S(t)dt = \int_0^1 S(t)dt + \int_1^x S(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}t^{2}dt + \int_1^x [1-\frac{1}{2}(t-2)^{2}]dt$

$$= \frac{1}{6} + (x-1) - \frac{1}{6}(x-2)^{3} - \frac{1}{6} = -\frac{x^{3}}{6} + x^{2} - x + \frac{1}{3}$$

当$x>2$时，$\int_0^x S(t)dt = \int_0^2 S(t)dt + \int_2^x S(t)dt = 1 + \int_2^x 1dt = x-1.$

因此 $$\int_0^x S(t)dt = \begin{cases}\frac{1}{6}x^{3} & 0\le x\le 1\\ -\frac{1}{6}x^{3}+x^{2}-x+\frac{1}{3} & 1<x\le 2\\ x-1 & x>2\end{cases}$$

五【详解】

方法 1：按莱布尼茨高阶导数公式：

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}.$$

为了求$\ln(1+x)$ 的n 阶导数，设 $y=\ln(1+x)$，

$$y'=\frac{1}{1+x};$$

$$y''=-\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{(1+x)^2};$$

$$y'''=-(-2)\cdot\frac{1}{(1+x)^3}=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3};$$

$$y^{(4)}=-3\ \frac{1\cdot 2}{(1+x)^4}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$$

一般地，可得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

即 $$\left[\ln(1+x)\right]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

设$u=\ln(1+x)$， $v=x^2$，利用上述公式对函数展开，由于对 x^2 求导，从三阶导数开始就为零，故展开式中只含有前三项.

$$f^{(n)}(x)=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-1)!}{(1+x)^{n-2}}.$$

代入 $x=0$，得：

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2},n=3,4\cdots.$$

方法 2： $y=f(x)$ 带佩亚诺余项的麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

求 $f^n(0)(n\geq 3)$ 可以通过先求 $y=f(x)$ 的的麦克劳林展开式，则展开式中 x^n 项的系数与$n!$的乘积就是 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶导数值 $f^{(n)}(0)$.

由麦克劳林公式，

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2}),$$

所以 $$x^2\ln(1+x)=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^n).$$

对照麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

从而推知

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$$

得 $$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2},\ n=3,4\cdots.$$

六【详解】因为$|\cos x|\ge 0$，且$n\pi\le x<(n+1)\pi$，

所以 $$\int_0^{n\pi}|\cos x|dx\le\int_0^{x}|\cos x|dx<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|dx.$$ 定积分的性质

又因为$|\cos x|$具有周期π，所以在长度为π的积分区间上的积分值均相等：

$$\int_a^{a+\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx,$$

从而

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|\cos x|dx+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\cos x|dx$$

$$=n\int_0^{\pi}|\cos x|dx=n(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx)$$

$$=n(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi})=n(1-(0-1))=2n$$

所以 $$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|dx=2(n+1).$$

所以 $$2n\le\int_0^{x}|\cos x|dx<2(n+1),$$ 即 $$2n\le S(x)<2(n+1).$$

(2) 由(1)有，当$n\pi\le x\le(n+1)\pi$时，$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

命$n\to\infty$取极限，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})\pi}=\frac{2}{\pi},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+\frac{1}{n})}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

由夹逼定理，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

七【详解】设从 2000 年初(相应 $t=0$)开始，第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m，浓度为 $\frac{m}{V}$，则在时间间隔 $[t,t+dt]$ 内，排入湖泊中 A 的量为：$\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}(t+dt-dt)=\frac{m_0}{6}dt$，流出湖泊的水中 A 的量为 $\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}dt=\frac{m}{3}dt$.

因而时间从 t 到 $t+dt$ 相应地湖泊中污染物 A 的改变量为：$dm=(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})dt$.

由分离变量法求解：

$$\frac{dm}{(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})}=dt$$

两边求积分：

$$\int\frac{dm}{(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})}=\int dt\Leftrightarrow-3\int\frac{d(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})}{(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})}=t+C_1\Leftrightarrow-3\ln(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})=t+C_1$$

$$\Leftrightarrow\ln(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})=\frac{t+C_1}{-3}\Leftrightarrow\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}=e^{\frac{t+C_1}{-3}}\Leftrightarrow-\frac{m}{3}=-\frac{m_0}{6}+e^{-\frac{t}{3}}\cdot e^{-\frac{C_1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{m_0}{2}-3e^{-\frac{C_1}{3}}\cdot e^{-\frac{t}{3}}\Leftrightarrow m=\frac{m_0}{2}-C\cdot e^{-\frac{t}{3}},\quad(C=3e^{-\frac{C_1}{3}})$$

初始条件为 $m(0)=5m_0$，代入初始条件得 $C=-\frac{9}{2}m_0$．于是 $m=\frac{m_0}{2}(1+9e^{-\frac{t}{3}})$，要满足污染物 A 的含量可降至 m_0 内，命 $m=m_0$，得 $t=6\ln 3$. 即至多需经过 $6\ln 3$ 年，湖泊中 A 的含量降至 m_0 以内.

八【证明】

方法1：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt,0\le x\le\pi$，有 $F(0)=0,$ 由题设有 $F(\pi)=0$.

又由题设 $\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$，用分部积分，有

$$0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi\cos xdF(x)$$

$$=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin xdx=\int_0^\pi F(x)\sin xdx$$

由积分中值定理知，存在$\xi \in (0,\pi)$使

$$0 = \int_0^{\pi} F(x)\sin x dx = F(\xi)\sin\xi \cdot (\pi - 0)$$

因为$\xi \in (0,\pi)$， $\sin\xi \neq 0$，所以推知存在$\xi \in (0,\pi)$, 使得 $F(\xi) = 0$. 再在区间$[0,\xi]$与$[\xi,\pi]$上对$F(x)$用罗尔定理，推知存在$\xi_1 \in (0,\xi)$，$\xi_2 \in (\xi,\pi)$使$F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0$，即 $f(\xi_1) = 0, f(\xi_2) = 0$

方法2：由$\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$及积分中值定理知，存在$\xi_1 \in (0,\pi)$，使$f(\xi_1) = 0$. 若在区间$(0,\pi)$内$f(x)$仅有一个零点ξ_1，则在区间$(0,\xi_1)$与(ξ_1,π)内$f(x)$异号. 不妨设在$(0,\xi_1)$内$f(x) > 0$，在(ξ_1,π)内$f(x) < 0$. 于是由$\int_0^{\pi} f(x)dx = 0, \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$，有

$$0 = \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx - \int_0^{\pi} f(x)\cos\xi_1 dx = \int_0^{\pi} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)dx$$
$$= \int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)dx + \int_{\xi_1}^{\pi} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)dx$$

当 $0 < x < \xi_1$时， $\cos x > \cos\xi_1$， $f(x)(\cos x - \cos\xi_1) > 0$；当 $\xi_1 < x < \pi$时，$\cos x < \cos\xi_1$，仍有$f(x)(\cos x - \cos\xi_1) > 0$，得到：$0 > 0$. 矛盾，此矛盾证明了$f(x)$在$(0,\pi)$仅有1个零点的假设不正确，故在$(0,\pi)$内$f(x)$至少有2个不同的零点.

九【详解】为了求曲线 $y = f(x)$ 在点$(6, f(6))$处的切线方程，首先需要求出 $y = f(x)$ 在$x = 6$处的导数，即切线斜率. 而函数又是以周期为 5 的函数，且在$x = 1$处可导，则在$x = 6$处可导，且其导数值等于函数在 $x = 1$ 处的导数值.

将 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$ 两边令 $x \to 0$ 取极限，由 f 的连续性得

$$f(1) - 3f(1) = \lim_{x\to 0}(8x + \alpha(x)) = 0 \Rightarrow \quad -2f(1) = 0$$

故 $f(1) = 0$，又由原设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，两边同除$\sin x$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x) - f(1)}{\sin x} + 3\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\sin x) - f(1)}{-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{\sin x} + \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\sin x}$$

根据导数的定义，得

$$f'(1) + 3f'(1) = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x} + \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x} = 8 \Rightarrow 4f'(1) = 8$$

所以$f'(1) = 2$，又因$f'(6) = f'(5+1) = f'(1)$，所以$f'(6) = 2$，由点斜式，切线方程为

$$(y-f(6))=f'(6)(x-6).$$

以 $f(6)=f(1)=0, f'(6)=2$ 代入得 $y=2(x-6)$. 即 $\quad 2x-y-12=0.$

十【详解】首先联立两式，求直线与曲线的交点：$1-x^2=ax^2$，得：$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$，而 $x\ge 0$，

则交点坐标为：$(x,y)=(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},\dfrac{a}{1+a})$. 由点斜式，故直线 OA 的方程为 $y=\dfrac{ax}{\sqrt{1+a}}$.

由旋转体体积公式 $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$，要求的体积就是用大体积减去小体积：

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\pi\left(\frac{ax}{\sqrt{1+a}}\right)^2dx-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\pi\left(ax^2\right)^2dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\pi\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{a^2x^3}{3(1+a)}-\frac{a^2x^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}=\frac{2\pi a^2}{15(1+a)^2}$$

为了求 V 的最大值，对函数关于 a 求导，

$$\frac{dV}{da}=\left(\frac{2\pi a^2}{15(1+a)^2}\right)'=\frac{2\pi}{15}\left(\frac{a^2}{(1+a)^2}\right)'=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a\cdot(1+a)^{\frac{5}{2}}-a^2\cdot\frac{5}{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5}$$

$$=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{(1+a)^{\frac{3}{2}}[2a(1+a)-\frac{5}{2}a^2]}{(1+a)^5}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{[2a(1+a)-\frac{5}{2}a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}$$

$$=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{[2a+2a^2-\frac{5}{2}a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{[2a-\frac{1}{2}a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}=\frac{\pi}{15}\cdot\frac{[4a-a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}\qquad a>0$$

命 $\dfrac{dV}{da}=0$，得唯一驻点 $a=4$，所以 $a=4$ 也是 V 的最大值点，最大体积为 $V\big|_{a=4}=\dfrac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$.

十一【详解】(1) 为了求 $f'(x)$，将 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$ 两边同乘 $(x+1)$，得

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0,$$

两边对 x 求导，得

$$f'(x)+(x+1)f''(x)+f(x)+(x+1)f'(x)-f(x)=0$$

即 $$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0.$$

上述方程为二阶可降阶微分方程，令$u=f'(x)$，化为$(x+1)u'+(x+2)u=0$，即

$$\frac{du}{u}=-\frac{(x+2)}{(x+1)}dx$$

两边求积分：

$$\int\frac{du}{u}=-\int\frac{(x+2)}{(x+1)}dx=-\int(1+\frac{1}{x+1})dx$$

即 $$\ln|u|=-(x+\ln(x+1))+C_1$$

所以 $$u=\pm e^{(-x-\ln(x+1)+C_1)}=\pm(e^{-x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot e^{C_1})$$

令$C=\pm e^{C_1}$，则$u=\dfrac{Ce^{-x}}{x+1}$，于是$f'(x)=u=\dfrac{Ce^{-x}}{x+1}$.

再以$x=0$代入原方程$f'(0)+f(0)-\dfrac{1}{1}\int_0^0 f(t)dt=f'(0)+f(0)=0$，由$f(0)=1$，有

$f'(0)=-1$，于是$C=-1, f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$.

(2)**方法 1**：用积分证.

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=1-\int_0^x\frac{e^{-t}}{t+1}dt.$$

而 $$0\le\int_0^x\frac{e^{-t}}{t+1}dt\overset{t>0}{\le}\int_0^x e^{-t}dt\overset{\text{牛-莱公式}}{=}-e^{-t}\Big|_0^x=1-e^{-x}$$

两边同乘以(-1)，得：

$$e^{-x}-1\le-\int_0^x\frac{e^{-t}}{t+1}dt\le 0,$$

即 $$e^{-x}\le f(x)=1-\int_0^x\frac{e^{-t}}{t+1}dt\le 1$$

方法 2：用微分学方法证.

因$f(0)=1, f'(x)<0$，即$f(x)$单调递减，所以当$x\ge 0$时$f(x)\le 1$.

要证$f(x)\ge e^{-x}$，可转化为证明$f(x)-e^{-x}\ge 0$，令$\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$，则

$\varphi(0)=1-1=0$，且$\varphi'(x)=f'(x)+e^{-x}\geq f'(x)+\dfrac{e^{-x}}{x+1}=0$ $\quad(x\geq 0)$

所以，当 $x\geq 0$ 时$\varphi(x)\geq 0$，即 $f(x)\geq e^{-x}$.

结合两个不等式，推知当 $x\geq 0$ 时， $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$. 证毕.

十二【详解】由题设得

$$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix},\quad B=\beta^T\alpha=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2.$$

所以 $A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha\left(\alpha\beta^T\right)\beta=2A$， $A^4=8A$； $B^2=4$， $B^2=16$

代入原方程$2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma$中，得

$16Ax=8Ax+16x+\gamma$，即$8(A-2E)x=\gamma$

其中E是三阶单位矩阵，令$x=[x_1,x_2,x_3]^T$，代入上式，得线性非齐次方程组

$$\begin{cases}-x_1+\frac{1}{2}x_2=0\\ 2x_1-x_2=0\\ x_1+\frac{1}{2}x_2-2x_3=1\end{cases}\qquad(1)$$

显然方程组得同解方程为

$$\begin{cases}2x_1-x_2=0\\ x_1+\frac{1}{2}x_2-2x_3=1\end{cases}\qquad(2)$$

令自由未知量 $x_1=k$，解得 $x_2=2k,\ x_3=k-\dfrac{1}{2}$

故方程组通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\2k\\k-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ (k\text{ 为任意常数})$$

十三【详解】

方法 1：先求$\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，将矩阵作初等行变换，得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9\\0&-6&-12\\0&10&20\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

知$\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$. 故$\gamma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$作初等行变换

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\begin{bmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&3&1\\0&a-3b&0\end{bmatrix}$$

因为$\gamma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，所以$a=3b$

又β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，故$\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$

将$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3]$作初等行变换

$$\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\2&0&6&\vdots&1\\-3&1&-7&\vdots&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\0&-6&-12&\vdots&1-2b\\-1&10&20&\vdots&3b\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\0&1&2&\vdots&\dfrac{1-2b}{-6}\\0&0&0&\vdots&3b+\dfrac{5}{3}(1-2b)\end{bmatrix}$$

由$\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=2$，得$3b+\dfrac{5}{3}(1-2b)=0$，解得$b=5$，及$a=3b=15$.

方法 2：由方法 1 中的初等变换结果可以看出α_1,α_2线性无关，且$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$，故$\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组. 又$\gamma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关. 从而得

$$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&3&1\\-1&0&0\end{vmatrix}=0,$$

计算三阶行列式得$-a+3b=0$，得$a=3b$

又 β_3 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出 ，即可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2\beta_3$线性相关，有

$$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&b\\0&-6&1-2b\\0&10&3b\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}1&3&b\\&-6&1-2b\\0&0&3b+\frac{10}{6}(1-2b)\end{vmatrix}=0$$

行列式展开得$-6\left(3b+\frac{10}{6}(1-2b)\right)=0$，

所以$3b+\frac{5}{3}(1-2b)=0$，得$b=5$ 及 $a=3b=15.$

方法 3：先利用β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，故方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=\beta$有解，即

$$\begin{bmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$$

有解. 对其增广矩阵施行初等行变化

$$\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\2&0&6&\vdots&1\\-3&1&-7&\vdots&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\0&-6&-12&\vdots&1-2b\\-1&10&20&\vdots&3b\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\0&1&2&\vdots&\frac{2b-1}{-6}\\0&0&0&\vdots&3b+\frac{5}{3}(1-2b)\end{bmatrix}$$

由其次线性方程组有解的条件(系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩)，知

$$3b+\frac{5}{3}(1-2b)=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}b=0$$

解得$b=5.$

又因为α_1和α_2线性无关，且$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$，所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2，

由题设条件知$\gamma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，从而$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&3&1\\-1&0&0\end{vmatrix}=0,$

解得$a=15$