1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$__.

(2) 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$ ....

(3) $\displaystyle\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=$ ....

(4) 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$ ....

(5) 曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})(x>0)$ 的渐近线方程为 ....

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,共15分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是　　(　)

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 发散　(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小　　(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

(2) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数是　　(　)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,其中 α 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 高阶的无穷小,且 $y(0)=\pi$,则 $y(1)=$(　)

(A) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$　　(B) 2π　　(C) π　　(D) $e^{\frac{\pi}{4}}$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续,且 $f(a)$ 为其极大值,则存在 $\delta>0$,当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时,必有　　(　)

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\ge 0$ (B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\le 0$

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\ge 0(x\ne a)$　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\le 0(x\ne a)$

(5) 设 A 是任一$n(n \ge 3)$阶方阵，A^*是其伴随矩阵，又k为常数，且$k \ne 0, \pm 1$，则必有

$(kA)^* =$ ( ) (A) kA^* (B) $k^{n-1}A^*$ (C) $k^n A^*$ (D) $k^{-1}A^*$

三、（本题满分5分）

求函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间$(0, 2\pi)$内的间断点，并判断其类型.

四、（本题满分5分）

确定常数a, b, c的值，使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} = c(c \ne 0)$.

五、（本题满分5分）

利用代换 $y = \dfrac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x - 2y'\sin x + 3y\cos x = e^x$ 化简，并求出原方程的通解.

六、（本题满分6分）

计算积分$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x - x^2|}}$.

七、（本题满分6分）

从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度v之间的函数关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为m，体积为 B，海水比重为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为$k(k > 0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y = f(v)$.

八、（本题满分8分）

设 $y = f(x)$ 是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数.

◍ 试证存在 $x_0 \in (0,1)$，使得在区间$[0, x_0]$上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于在$[x_0, 1]$上以 $y = f(x)$ 为曲边的梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x) > -\dfrac{2f(x)}{x}$，证明(1)中的 x_0 是唯一的.

九、(本题满分8分)

设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

十、(本题满分8分)

设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

十一、(本题满分8分)

设 $x\in(0,1)$，证明：

(1) $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$；

(2) $\dfrac{1}{\ln 2}-1 < \dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$.

十二、(本题满分5分)

设 $(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，其中 E 是4阶单位矩阵，A^T 是4阶矩阵 A 的转置矩阵，

$$B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

求 A.

十三、(本题满分8分)

已知 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T,\alpha_2=(2,7,1,3)^T,\alpha_3=(0,1,-1,a)^T,\beta=(3,10,b,4)^T$，问：

(1) a,b 取何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

(2) a,b 取何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并写出此表达式.

1998年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上.)

(1)【答案】$-\dfrac{1}{4}$

【解析】**方法1**：用四则运算将分子化简,再用等价无穷小替换,

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2-4}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}{4x^2}$$

$$\xlongequal{\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

方法2：采用洛必达法则.

$$原式\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)}{4}=-\frac{1}{4}.$$

方法3：将分子按佩亚诺余项泰勒公式展开至 x^2 项,

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o_1\left(x^2\right),\quad \sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o_2\left(x^2\right),$$

从 而 原 式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o_1\left(x^2\right)+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o_2\left(x^2\right)-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^2+o_1\left(x^2\right)+o_2\left(x^2\right)}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

(2)【答案】$\dfrac{37}{12}$

【分析】求曲线与 x 轴围成的图形的面积,应分清楚位于 x 轴上方还是下方,为此,要先求此曲线与 x 轴交点.

【解析】 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴的交点,即 $-x^3+x^2+2x=-x(x-2)(x+1)=0$ 的根为 $x=-1,0,2$.

当 $-1<x<0$ 时，$y<0$；当 $0<x<2$ 时，$y>0$，从而

$$
\begin{aligned}
A&=\int_{-1}^{0}-ydx+\int_{0}^{2}ydx=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx\\
&=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}\\
&=0-(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1)-(4-\frac{8}{3}-4)=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}.
\end{aligned}
$$

(3)【答案】$-\cot x\cdot\ln\sin x-\cot x-x+C$.

【解析】因为 $(\cot x)'=-\csc^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$，所以

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx&=-\int\ln\sin x(\cot x)'dx=-\int\ln\sin x d\cot x\\
&\underline{\underline{\text{分部}}}-[\cot x\cdot\ln\sin x-\int\cot x d\ln\sin x]\\
&=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\cot x\frac{\cos x}{\sin x}dx\\
&=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx\\
&=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx\\
&=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int 1dx\\
&=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int(-\cot x)'dx-x\\
&=-\cot x\cdot\ln\sin x-\cot x-x+C.
\end{aligned}
$$

(4)【答案】 $xf(x^2)$

【解析】作积分变量代换 $u=x^2-t^2$, $t:0\to x\Rightarrow u:x^2\to 0$,

$$du=d(x^2-t^2)=-2tdt\Rightarrow dt=-\frac{1}{2t}du,$$

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt\ \underline{\underline{u=x^2-t^2}}=\int_{x^2}^{0}tf(u)\left(-\frac{1}{2t}\right)du=\int_{x^2}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du,$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x}\cdots = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(u)du = \frac{1}{2}f(x^2)\cdot(x^2)' = \frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x = xf(x^2).$$

【相关知识点】1. 对积分上限的函数的求导公式：若 $F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$，$\alpha(t)$，$\beta(t)$ 均一阶可导，则

$$F'(t)=\beta'(t)\cdot f[\beta(t)]-\alpha'(t)\cdot f[\alpha(t)].$$

(5)【答案】$y=x+\frac{1}{e}$

【解析】题中未说什么渐近线，所以三类渐近线都要考虑.

由曲线方程 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})$ 知，铅直渐近线可能在两处：$x\to\left(-\frac{1}{e}\right)^+$ 及 $x\to 0$，但题设 $x>0$，所以 $x\to\left(-\frac{1}{e}\right)^+$ 不予考虑，考虑 $x\to 0^+$ 的情况. 当 $x\to 0^+$ 时，

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(e+\frac{1}{x}) \xlongequal{x=1/t} \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(e+t)}{t} \xlongequal{洛} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e+t}=0\neq\infty,$$

所以无铅直渐近线；

因 $$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\lim_{x\to+\infty} x\ln(e+\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty} x\ln e=+\infty,$$

故无水平渐近线.

再考虑斜渐近线：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln(e+\frac{1}{x})-1\right]=\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln e+\ln(1+\frac{1}{ex})-1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{ex})=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{ex}=\frac{1}{e},$$

（$x\to+\infty$ 时，$\ln(1+\frac{1}{ex})\sim\frac{1}{ex}$）

所以有斜渐近线 $y=x+\frac{1}{e}$.

【相关知识点】1. 铅直渐近线：如函数 $y=f(x)$ 在其间断点 $x=x_0$ 处有 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是函数的一条铅直渐近线；

水平渐近线：当 $\lim_{x\to\infty} f(x)=a,(a为常数)$，则 $y=a$ 为函数的水平渐近线.

斜渐近线：若有 $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$ 存在且不为 ∞，则 $y=ax+b$ 为斜渐近线.

二、选择题(本题共5小题，每小题3分，共15分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题

目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

(1)【答案】(D)

【解析】**方法1：**直接利用无穷小量的性质可以证明(D)是正确的.

由$y_n=(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}$及$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$可知$y_n$为两个无穷小之积，故$y_n$亦为无穷小，应选(D).

方法2：排除法.

(A)的反例：$x_n=n,y_n=\dfrac{1}{n^2},\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$满足题设，但$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$不发散；

(B)的反例：$x_n=\begin{cases}2k-1, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}\quad y_n=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ 2k, & n=2k,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots,$

满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但$y_n$不是有界数列；

(C)的反例：$x_n:1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$有界数列，$y_n=1(n=1,2,\cdots)$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，但$y_n$不是无穷小；

排除掉(A)、(B)、(C)，故选(D).

(2)【答案】(B)

【解析】当函数中出现绝对值号时，就有可能出现不可导的“尖点”，因为这时的函数是分段函数. $f(x)=(x^2-x-2)|x||x^2-1|$，当$x\neq 0,\pm1$时$f(x)$可导，因而只需在$x=0,\pm1$处考察$f(x)$是否可导. 在这些点我们分别考察其左、右导数.

$$\text{由 } f(x)=\begin{cases}(x^2-x-2)x(1-x^2), & x<-1,\\ (x^2-x-2)x(x^2-1), & -1\le x<0,\\ (x^2-x-2)x(1-x^2), & 0\le x<1,\\ (x^2-x-2)x(x^2-1), & 1\le x,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad f_-'(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{(x^2-x-2)x(1-x^2)-0}{x+1}=0,$$

$$f_+'(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x^2-x-2)x(1-x^2)-0}{x+1}=0,$$

即$f(x)$在$x=-1$处可导. 又

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{(x^2-x-2)x(x^2-1)-0}{x}=2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2-x-2)x(1-x^2)-0}{x}=-2,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

类似, 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处亦不可导. 因此 $f(x)$ 只有2个不可导点, 故应选(B).

评注：本题也可利用下列结论进行判断：

设函数 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $\varphi(a)=0$.

(3) 【答案】(A)

【解析】由 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y}{1+x^2}+\dfrac{\alpha}{\Delta x}$.

令 $\Delta x\to 0$, 得 α 是 Δx 的高阶无穷小, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}=0$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y}{1+x^2}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{\Delta x}=\frac{y}{1+x^2}$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}.$$

分离变量, 得 $$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x^2},$$

两边积分, 得 $\ln|y|=\arctan x+C$，即 $y=C_1e^{\arctan x}$.

代入初始条件 $y(0)=\pi$, 得 $y(0)=C_1e^{\arctan 0}=C_1=\pi$. 所以, $y=\pi e^{\arctan x}$.

故 $y(1)=\pi e^{\arctan x}\Big|_{x=1}=\pi e^{\arctan 1}=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

【相关知识点】无穷小的比较：

设在同一个极限过程中, $\alpha(x),\beta(x)$ 为无穷小且存在极限 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$,

(1) 若 $l\neq 0$, 称 $\alpha(x),\beta(x)$ 在该极限过程中为同阶无穷小;

(2) 若 $l=1$, 称 $\alpha(x),\beta(x)$ 在该极限过程中为等价无穷小, 记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

(3) 若 $l=0$, 称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(不为 ∞), 称 $\alpha(x),\beta(x)$ 不可比较.

⑷ 【答案】(C)

【解析】由 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大点,知存在 $\delta>0$,当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时, $f(x)\le f(a)$,

即 $f(x)-f(a)\le 0$. 因此,

当 $x\in(a-\delta,a)$ 时, $(x-a)[f(x)-f(a)]\ge 0$;

当 $x\in(a,a+\delta)$ 时, $(x-a)[f(x)-f(a)]\le 0$.

所以,(A)与(B)都不正确.

已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续,由函数在一点连续的定义可知, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$,再由极限四则运算法则可得

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}=\frac{f(a)-f(x)}{(a-x)^2}\ge 0(x\ne a).$$

应选(C).

⑸ 【答案】(B)

【解析】对任何n阶矩阵都要成立的关系式,对特殊的n阶矩阵自然也要成立.那么,当 A 可逆时,由 $A^*=|A|A^{-1}$,有

$$(kA)^*=|kA|(kA)^{-1}=k^n|A|\cdot\frac{1}{k}A^{-1}=k^{n-1}|A|A^{-1}=k^{n-1}A^*.$$

故应选(B).

一般地,若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,有 $kA=(ka_{ij})_{n\times n}$,那么矩阵 kA 的第i 行 j 列元素的代数余子式为

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}k^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即$|kA|$中每个元素的代数余子式恰好是$|A|$相应元素的代数余子式的k^{n-1}倍,因而,按伴随矩

阵的定义知$(kA)^*$的元素是 A^* 对应元素的k^{n-1}倍.

【相关知识点】1. 行列式的性质：若 A 是 n 阶矩阵, 则 $|kA| = k^n\ |A|$.

2. 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$, 且 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$.

三、(本题满分5分)

【分析】由间断点的定义可知, 函数无定义的点一定是间断点, 故可以先找出函数无定义的点, 再讨论判断出间断点的类型.

【解析】 $f(x)$ 在区间$(0, 2\pi)$ 内的间断点为 $\dfrac{1}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 无定义的点, 即 $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$ 各点.

在 $x = \dfrac{\pi}{4}$ 处, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = +\infty$; 在 $x = \dfrac{5\pi}{4}$ 处, $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{4}^+} f(x) = +\infty$, 故 $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点；

在 $x = \dfrac{3\pi}{4}$ 处, $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}} f(x) = 1$; 在 $x = \dfrac{7\pi}{4}$ 处, $\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}} f(x) = 1$, 但相应的函数值在该点无定义, 故 $f(x)$ 在 $x = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$ 处为可去间断点.

【相关知识点】设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < A < 1 \\ +\infty, & A > 1 \end{cases}$.

2. 函数 $f(x)$ 的间断点或者不连续点的定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 只要满足一下三种情况之一即是间断点.

① 在 $x = x_0$ 没有定义；

② 虽在 $x = x_0$ 有定义, 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

③ 虽在 $x = x_0$ 有定义, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

3. 通常把间断点分成两类：如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点, 但左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在, 那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点；不是第一类间断点的任何间断点, 称为第二类间断点.

四、(本题满分5分)

【分析】解决这类问题, 原则上与求极限差不多, 但是因为其中含有某些参数, 比如在用洛必

达法则前,极限是否为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型,要先行讨论,通过讨论,有时就可以推断出其中参数的特点,然后再求极限,这是一类常考的题目.

【解析】当 $x\to 0$ 时 $ax-\sin x\to 0$,又由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq 0)$,所以应有

$\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0$(否则与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq 0)$ 矛盾),从而只有 $b=0$,因此

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}$ 满足洛必达法则的条件,用洛必达法则求其极限.

$$0\neq c=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}\overset{等}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}.$$

(当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)\sim x$)

如果 $a\neq 1$,则右边极限为 ∞,与原设左边矛盾,故 $a=1$,于是上述等式成为

$$0\neq c=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{等}{=}\frac{1}{2}.(当\ x\to 0\ 时,\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2)$$

所以最后得 $a=1,b=0,c=\frac{1}{2}$.

五、(本题满分5分)

【解析】**方法1**:由 $y=\dfrac{u}{\cos x}=u\sec x$,有

$$y'=u'\sec x+u\sec x\tan x,$$
$$y''=u''\sec x+2u'\sec x\tan x+u(\sec x\tan^2 x+\sec^3 x),$$

代入原方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^x$,得

$$u''+4u=e^x.\quad(*)$$

先求其相应齐次方程的通解,由于其特征方程为 $\lambda^2+4=0$,则特征方程的根为

$\lambda=\pm 2i$.所以通解为 $\overline{u}(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$,($C_1,C_2$ 为任意常数).

再求非齐次方程的特解,特解应具有形式 $u^*(x)=Ae^x$,代入(*)式,得

$$\left(Ae^x\right)''+4Ae^x=Ae^x+4Ae^x=5Ae^x=e^x$$

解得，$A=\frac{1}{5}$，因此$u^*(x)=\frac{1}{5}e^x$.

故(*)的通解为

$$u(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{5}e^x,\ (C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

所以,原微分方程的通解为

$$y=C_1\frac{\cos 2x}{\cos x}+2C_2\sin x+\frac{e^x}{5\cos x}.$$

方法 2：由$y=\frac{u}{\cos x}$有$u=y\cos x$，于是

$$u'=y'\cos x-y\sin x,$$
$$u''=y''\cos x-2y'\sin x-y\cos x,$$

原方程化为$u''+4u=e^x$（以下与方法 1 相同）.

【相关知识点】两函数乘积的求导公式：

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

六、（本题满分6分）

【解析】当$x=1$时,被积函数的极限$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}=\infty$，即$x=1$是被积函数的无穷间断点,

故所给的是广义积分.

$$|x-x^2|=|x(1-x)|=\begin{cases}x-x^2, & 0\le x\le 1,\\ x^2-x, & x<0\text{或}x>1.\end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}$$

$$=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\ln(\sec t+\tan t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

其中,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\frac{1}{2}\sqrt{1-4(x-\frac{1}{2})^2}}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

$$=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

求 $\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}$：

设 $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t, x:1\to\frac{3}{2}$，则 $t:0\to\frac{\pi}{3}$，$dx=d(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sec t)=\frac{1}{2}\sec t\tan t dt$，

$$\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}=\sqrt{(\frac{1}{2}\sec t)^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\sec^2 t-1}=\frac{1}{2}\tan t,$$

于 是 ，$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{2}\sec t\tan t dt dx}{\frac{1}{2}\tan t}=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sec t dt=\ln(\sec t+\tan t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}.$

七、（本题满分6分）

【解析】先建立坐标系，取沉放点为原点 O，铅直向下作为 Oy 轴正向，探测器在下沉过程中受重力、浮力和阻力的作用，其中重力大小：mg，浮力的大小：$F_{浮}=-\rho B$；阻力：$-kv$，则由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho g-kv, y\big|_{t=0}=0, v\big|_{t=0}=0. \ (*)$$

由 $\frac{dy}{dt}=v,\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}=v\Big/\frac{dy}{dv}$，代入(*)得 y 与 v 之间的微分方程

$$mv\left(\frac{dy}{dv}\right)^{-1}=mg-B\rho-kv, \quad v\big|_{y=0}=0\cdot$$

分离变量得 $dy=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}dv$，

两边积分得 $\int dy=\int\frac{mv}{mg-B\rho-kv}dv$，

$$y=\int\frac{mv+\frac{Bm\rho}{k}-\frac{m^2g}{k}-\frac{Bm\rho}{k}+\frac{m^2g}{k}}{mg-B\rho-kv}dv$$

$$=\int\frac{-\frac{m}{k}(mg-B\rho-kv)-\frac{Bm\rho}{k}+\frac{m^2g}{k}}{mg-B\rho-kv}dv$$

$$=\int\left(-\frac{m}{k}+\frac{\frac{m^2g-Bm\rho}{k}}{mg-B\rho-kv}\right)dv$$

$$=\int-\frac{m}{k}dv+\int\frac{m(mg-B\rho)}{k(mg-B\rho-kv)}dv$$

$$=-\frac{m}{k}v+\int\frac{m(mg-B\rho)\cdot(-\frac{1}{k})}{k(mg-B\rho-kv)}d(mg-B\rho-kv)$$（第一类换元法）

$$=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C.$$

再根据初始条件$v|_{y=0}=0$, 即

$$-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho)+C=0\Rightarrow C=\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho).$$

故所求 y 与v 函数关系为

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\left(\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}\right).$$

八、(本题满分8分)

【解析】(1) 要证$\exists x_0\in(0,1)$, 使$x_0f(x_0)=\int_{x_0}^{1}f(x)dx$；令$\varphi(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)dt$, 要证$\exists x_0\in(0,1)$, 使$\varphi(x_0)=0$. 可以对$\varphi(x)$ 的原函数$\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$ 使用罗尔定理：

$$\Phi(0)=0,$$

$$\Phi(1)=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx-\int_0^1\left(\int_x^1 f(t)dt\right)dx$$

$$\overset{\text{分部}}{=}\int_0^1 xf(x)dx-\left[x\int_x^1 f(t)dt\Big|_{x=0}^{x=1}+\int_0^1 xf(x)dx\right]=0,$$

又由 $f(x)$ 在$[0,1]$ 连续$\Rightarrow\varphi(x)$ 在$[0,1]$ 连续，$\Phi(x)$ 在$[0,1]$ 连续, 在$(0,1)$ 可导. 根据罗尔定

理，$\exists x_0 \in (0,1)$，使$\Phi'(x_0)=\varphi(x_0)=0$.

(2) 由$\varphi'(x)=xf'(x)+f(x)+f(x)=xf'(x)+2f(x)>0$，知$\varphi(x)$在$(0,1)$内单调增，故(1)中的 x_0是唯一的.

评注： 若直接对$\varphi(x)$使用零点定理，会遇到麻烦：

$$\varphi(0)=-\int_0^1 f(t)dt \le 0, \varphi(1)=f(1)\ge 0.$$

当 $f(x)\equiv 0$ 时，对任何的 $x_0\in(0,1)$ 结论都成立；

当 $f(x)\underline{\equiv}0$ 时，$\varphi(0)<0$，但$\varphi(1)\ge 0$，若$\varphi(1)=0$，则难以说明在$(0,1)$内存在 x_0. 当直接对$\varphi(x)$用零点定理遇到麻烦时，不妨对$\varphi(x)$的原函数使用罗尔定理.

【相关知识点】1. 罗尔定理：如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

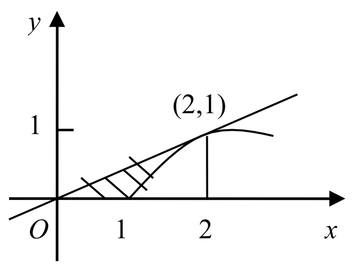
(2) 在开区间(a,b)内可导；

(3) 在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，

那么在(a, b)内至少有一点ξ（$a<\xi<b$），使得 $f'(\xi)=0$.

九、(本题满分8分)

【解析】先求切线方程：(x_0,y_0)处的切线为



$$y-y_0=\frac{1}{2y_0}(x-x_0).$$

以$x=0,y=0$代入切线方程，解得 $x_0=2, y_0=\sqrt{x_0-1}=1$，

切线方程为 $y=\frac{1}{2}x$.（见右图）

由曲线段 $y=\sqrt{x-1}(1\le x\le 2)$绕$x$轴的旋转面面积

$$S_1=\int_1^2 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx=\int_1^2 2\pi\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4(x-1)}}dx$$

$$=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}(4x-3)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

而由曲线段 $y=\frac{1}{2}x(0\le x\le 2)$ 绕 x 轴的旋转面面积

$$S_2=\int_0^2 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^2 2\pi\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi\int_0^2 xdx=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2=\sqrt{5}\pi.$$

由此，旋转体的表面积为

$$S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1).$$

十、（本题满分8分）

【解析】由题设及曲率公式，有

$$\frac{-y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

（因曲线 $y=y(x)$ 向上凸，$y''<0,|y''|=-y''$），化简得 $\frac{y''}{1+y'^2}=-1.$

改写为 $\frac{dy'}{1+y'^2}=-dx$，

两边积分得 $\int\frac{dy'}{1+y'^2}=\int -dx$，

解 得 $\arctan y'=-x+C_1$.

由题设，曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=1+x$，可知 $y(0)=1,y'(0)=1$.

以 $x=0$ 代入上式，得 $C_1=\frac{\pi}{4}$. 于是有 $\arctan y'=-x+\frac{\pi}{4}$，故有

$$y'=\tan(\frac{\pi}{4}-x),-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}.$$

（上式中注明区间是 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ 的原因：本题中使正切函数有意义的区间有很多，一般可以写成 $-\frac{\pi}{4}+2n\pi<x<\frac{3\pi}{4}+2n\pi$，本题选择 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ 是因为题设曲线在 $x=0$ 处有值，

又已知曲线是一条连续曲线,因此解的范围应该包含 $x=0$ 在内并且使 $y(x)$ 连续的一个区间.）

再积分得

$$y=\int\tan(\frac{\pi}{4}-x)dx=\int\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}dx$$

$$=\int\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}d\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\ln\left|\cos(\frac{\pi}{4}-x)\right|+C_2.$$

又由题设可知 $y(0)=1$，代入确定 $C_2=1-\ln\cos\frac{\pi}{4}=1+\frac{1}{2}\ln 2$，于是所求的曲线方程为

$$y=\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1+\frac{1}{2}\ln 2,\ -\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}.$$

由于 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\le 1$，且 $\ln x$ 在定义域内是增函数，所以当且仅当 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$ 时，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时 y 取得最大值，由于 $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以此时也是 y 取极大值，极大值为 $y=1+\frac{1}{2}\ln 2$；显然 y 在 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ 没有极小值.

【相关知识点】曲线 $y=y(x)$ 在其上任意一点 (x,y) 处的曲率公式：$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

十一、（本题满分8分）

【分析】不等式的证明一般用单调性来证明,除此之外,还可以用拉格朗日中值公式、拉格朗日余项泰勒公式、最大(小)值来证明.

【解析】(1)**方法1**：利用单调性证明.

令 $\varphi(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$, 则

$$\varphi'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x),$$

$$\varphi''(x)=\frac{2}{1+x}[x-\ln(1+x)],$$

$$\varphi'''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{(1+x)^2}>0(0<x<1).$$

$\Rightarrow\varphi''(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，$\varphi''(x)>\varphi''(0)=0(0<x<1)$；

$\Rightarrow\varphi'(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，$\varphi'(x)>\varphi'(0)=0(0<x<1)$；

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在$(0,1)$ 内单调递增, $\varphi(x) > \varphi(0) = 0(0 < x < 1)$,

即$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

方法2：改写原不等式, 当 $x \in (0,1)$ 时, $1+x > 0$, 故可在不等式两边同时除以$(1+x)$, 有

$$\ln^2(1+x) < \frac{x^2}{1+x},$$

两边开平方， $\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.

令$g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{\sqrt{1+x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x+1-2\sqrt{1+x}+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} < 0, (当x > 0)$$

故函数 $g(x)$ 在区间$[0,1]$ 上单调减少, 由 $g(0) = 0$, 可知当 $x > 0$ 时， $g(x) < g(0) = 0$, 即

$\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, 从而原不等式成立, 证毕.

方法3：由方法1, $\varphi(x) = x^2 - (1+x)\ln^2(1+x)$, 已证$\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0, \varphi''(x) > 0, (x > 0)$

于是由$\varphi(x)$ 的1阶麦克劳林公式(拉格朗日余项)有

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2!}\varphi''(\xi)x^2 = \frac{1}{2}\varphi''(\xi)x^2 > 0.$$

即$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$, 证毕.

(2) 令 $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)},$$

由(1)，$f'(x)<0(0<x<1)\Rightarrow f(x)$ 在$(0,1)$ 单调减$\Rightarrow$ $f(1)<f(x)<f(0^+)(0<x<1)$，而 $f(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1$，且

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\overset{等}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2},$$

故 $\dfrac{1}{\ln 2}-1<f(x)<\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$. 证毕.

十二、(本题满分5分)

【解析】由矩阵运算法则，将等式$(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$两边左乘C，得

$$C(2E-C^{-1}B)A^T=CC^{-1},\ 即(2C-B)A^T=E.$$

对上式两端取转置，有 $A(2C^T-B^T)=E$.

由可逆矩阵及逆矩阵的定义，可知矩阵$2C^T-B^T$，A 均可逆，因为 A 是4阶方阵，故

$$A=(2C^T-B^T)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

十三、(本题满分8分)

【分析】 β 能由(不能由)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出$\Leftrightarrow$ $\alpha_i,i=1,2,\cdots s,\beta$ 为列向量的非齐次线性方程组$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_sx_s=\beta$ 有解(无解)，从而将线性表出的问题转化为方程组解的情况的判定与求解.

【解析】令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$X=[x_1,x_2,x_3]^T$，作方程组 $AX=\beta$，并对此方程组的增广矩阵进行初等变换：

$$
\left[A\vdots\beta\right]=\begin{bmatrix}1&2&0&\vdots&3\\4&7&1&\vdots&10\\0&1&-1&\vdots&b\\2&3&a&\vdots&4\end{bmatrix}\xrightarrow{(*_1)}\begin{bmatrix}1&2&0&\vdots&3\\0&-1&1&\vdots&-2\\0&1&-1&\vdots&b\\0&-1&a&\vdots&-2\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{(*_2)}\begin{bmatrix}1&2&0&\vdots&3\\0&-1&1&\vdots&-2\\0&0&a-1&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&b-2\end{bmatrix}.
$$

其中, $(*_1)$ 变换：将第 1 行乘以-4 加到第 2 行,再将第 1 行乘以-2 加到第 4 行；

$(*_2)$ 变换：第 2 行加到第 1 行,再将第 2 行乘以-1 加到第 4 行,最后 3,4 行互换.

由非齐次线性方程组有解的判定定理,可得

(1) 当 $b\neq 2$ 时,线性方程组 $AX=\beta$ 无解,此时 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

(2) 当 $b=2,a\neq 1$ 时, $r(A)=r(\overline{A})=3$, 线性方程组 $AX=\beta$ 有唯一解, 下面求此唯一解.

由以上增广矩阵变换可得线性方程组 $AX=\beta$ 的同解方程组为

$$
\begin{cases}x_1+2x_2=3\\-x_2+x_3=-2,\\(a-1)x_3=0\end{cases}
$$

解得唯一解为 $X=\left[-1,2,0\right]^T$. 故 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出为 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$

(3) 当 $b=2,a=1$ 时, $r(A)=r(\overline{A})=2<3$, 线性方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解. 求齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系.

齐次线性方程组 $AX=0$ 的同解方程组为

$$
\begin{cases}x_1+2x_2=0,\\-x_2+x_3=0\end{cases}
$$

基础解系所含向量的个数为 $n-r(A)=3-2=1$, 选 x_2 为自由未知量, 取 $x_2=1$, 解得基础解系为 $\xi=(-2,1,1)^T$. 取 $x_3=0$, 解得的一个特解为 $\eta^*=(-1,2,0)^T$, 则由非齐次线性方程组解的结构可知, 方程组 $AX=\beta$ 的通解为

$$
X=k\xi+\eta^*=\left(-2k-1,k+2,k\right)^T,\ k \text{ 是任意常数.}
$$

则 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示法为无穷多（常数 k 可以任意），且

$$\beta=-(2k+1)\alpha_1+(k+2)\alpha_2+k\alpha_3.$$

【相关知识点】 非齐次线性方程组有解的判定定理：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，方程组 $Ax=b$，则

(1) 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})=n.$

(2) 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})<n.$

(3) 无解 $\Leftrightarrow r(A)+1=r(\bar{A}). \Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列向量线性表出.